Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

MASTER 1 MATHEMATIQUES – INFORMATIQUE
MATHEMATIQUES GENERALES
M1...

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
47	**M1, UE 1.3**	**MIMA-SMAAU11T**	**2**

Nom de l'UE : Mesure, Intégration, Probabilités

Le cours est essentiellement tiré d'un livre disponible sur la page web indiquée ci dessous. Pour chaque semaine, il est proposé d'étudier une partie du cours et de faire des exercices (corrigés).
Deux devoirs sont à rendre afin de bénéficier d'une note de contrôle continu.
note finale=max(note-examen, 1/3(2 note-examen + note-contrôle-continu)).

- Contenu de l'envoi : Cours : Chapitre 3 paragraphe 4 et chapitre 4, Exercices

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 (Loi d'une variable aléatoire réelle (v.a.r.)) :
Etudier le paragraphe 3.4 contenu dans le premier envoi (loi d'une v.a.r., fonction de répartition)
Exercices proposés (avec corrigés) : 3.9, 3.18 (contenus dans le 1er envoi), 3.22, 3.23

Semaine 2 (Différentes notions de convergence) :
Etudier le paragraphe 3.5 (Convergence pp, ps, en mesure, en probabilité).
Exercices proposés (avec corrigés) : 3.26, 3.28, 3.29, 3.31

Semaine 3 (Intégrale de fonctions positives) :
Etudier les paragraphes 4.1 à 4.3 (intégrale sur E+, M+, Convergence monotone, lemme de Fatou)
Etudier le paragraphe 4.4 (mesure et probabilités de densité).
Exercices proposés (avec corrigés) : 4.1, 4.2, 4.11, 4.14, 4.15

Semaine 4 (Fonctions intégrables, Espérance d'une v.a.r.) :
Etudier les paragraphes 4.5 à 4.8 (Fonctions intégrales, théorèmes de convergence)
Etudier le paragraphe 4.9 (Espérance et moment d'une v.a.r.) et 4.10.
Exercices proposés (avec corrigés) : 4.26, 4.30, 4.43, 4.44, 4.46, 4.54

-Coordonnées des enseignants responsables de l'envoi
E. Hillion et T. Gallouet, CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr, erwan.hillion@univ-amu.fr
Vous pouvez aussi consulter la page web:
http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d/mip.d
et nous poser des questions par le forum d'ametice ou par email

3.5 Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité

On introduit ici plusieurs notions de convergence de fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) et on donne des liens entre ces différentes convergences. On introduit les notions équivalentes pour les variables aléatoires en langage probabiliste.

Définition 3.32 (Égalité presque partout) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* F *un ensemble et* f *et* g *des fonctions définies de* E *dans* F *(*$F = \mathbb{R}$ *ou* $F = \overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* $f = g$ m*-presque partout (et on note* $f = g$ m*-p.p.) si l'ensemble* $\{x \in E ; f(x) \neq g(x)\}$ *est négligeable, c'est-à-dire qu'il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$ *et* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in A^c$.

On peut remarquer que si f et g sont des fonctions mesurables de E (muni de la tribu T et de la mesure m) dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$), l'ensemble $\{x \in E ; f(x) \neq g(x)\}$ (noté aussi $\{f \neq g\}$) appartient à T. Le fait que $f = g$ m p.p. revient donc à dire que $m(\{f \neq g\}) = 0$. Dans la cas où f ou g n'est pas mesurable, l'ensemble $\{f \neq g\}$ peut être négligeable sans appartenir à T (il appartient nécessairement à T si la mesure est complète, voir la définition 2.26).

En l'absence de confusion possible, on remplace m-p.p. par p.p.. Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.33 (Égalité presque sûre) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *et* Y *des variables aléatoires réelles. On dit que* $X = Y$ *presque sûrement (et on note* $X = Y$ *p.s.), si l'ensemble* $\{x \in E ; X(x) \neq Y(x)\}$ *est négligeable.*

Définition 3.34 (Convergence presque partout) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* F *un ensemble,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E *dans* F *et* f *une fonction de* E *dans* F *(*$F = \mathbb{R}$ *ou* $F = \overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* f_n *converge presque partout vers* f *(*$f_n \to f$ p.p.*) s'il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$.

Noter que la convergence simple entraîne la convergence presque partout.

La définition 3.34 se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.35 (Convergence presque sûre) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire réelle. On dit que* X_n *converge presque sûrement vers* X *(*$X_n \to X$ *p.s.) s'il existe une partie*

A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $X(x)$.

Définition 3.36 (Convergence presque uniforme) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$*. On dit que* f_n *converge presque uniformément vers* f *(*$f_n \to f$ *p.unif.) si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) \leq \varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c.

La convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout (voir exercice 3.27).

Attention, la convergence presque uniforme ne donne pas la convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle. La convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle est reliée à la convergence essentiellement uniforme, c'est-à-dire la convergence pour le sup essentiel, défini ci-après, ou pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ que nous verrons dans la section 6.1.2.

Définition 3.37 (Sup essentiel) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}$*. On dit que* f *est essentiellement bornée si il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|f| \leq C$ *p.p.. On appelle alors sup essentiel de* $|f|$*, et on le note* $\|f\|_\infty$*, l'infimum des valeurs* C *telles que* $|f| \leq C$ *p.p.. Si* f *n'est pas essentiellement bornée, on pose* $\|f\|_\infty = \infty$.

Remarquons que dans le cas où $(E,T,m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, le sup essentiel d'une fonction continue est la borne supérieure de sa valeur absolue (ceci fait l'objet de la proposition 6.18).

Définition 3.38 (Convergence essentiellement uniforme) *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$*. On dit que* f_n *converge essentiellement uniformément vers* f *(*$f_n \to f$ *ess. unif.) si* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.

Il est facile de voir que la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence presque uniforme, mais la réciproque est fausse. Le théorème suivant donne, dans le cas où la mesure est finie, un résultat très important qui fait le lien entre la convergence presque partout et la convergence presque uniforme.

Théorème 3.39 (Egorov) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré, tel que* $m(E) < +\infty$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$*. On suppose que* $f_n \to f$ *p.p.. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) \leq \varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c*. (Autrement dit, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque uniformément vers* f*.)*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de la seconde partie du devoir 1. Attention, lorsque $m(\mathrm{E}) = +\infty$, on peut trouver des suites de fonctions qui convergent presque partout et non presque uniformément.

Définition 3.40 (Convergence en mesure) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$*. On dit que* f_n *converge en mesure vers* f *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in \mathrm{E}\ ; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.41 (Convergence en probabilité) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé,* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire réelle . On dit que* X_n *converge en probabilité vers* X *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} p(\{x \in \mathrm{E}\ ; |\mathrm{X}(x) - \mathrm{X}_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

On peut montrer (cf exercice 3.26) que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $f = g$ p.p.. On montre aussi que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$, et, si m est une mesure finie, $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f g \in \mathcal{M}$.

On montre à l'aide du théorème d'Egorov que si f_n converge vers f presque partout, et si $m(\mathrm{E}) < +\infty$, alors f_n converge vers f en mesure. Réciproquement, si f_n converge vers f en mesure, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque uniformément (et donc presque partout). Ce second résultat est vrai même si $m(\mathrm{E}) = +\infty$ (voir exercice 3.29).

On donne maintenant un résumé des différents types de convergence connus jusqu'à présent avec les relations existantes entre eux. Les relations entre convergence presque partout et convergence en mesure (resp. convergence presque sûre et convergence en probabilité) sont étudiées dans l'exercice 3.29. (On en introduira bientôt encore quelques-unes)

Terminologie analyste	**Terminologie probabiliste**
convergence simple (cs)	
convergence uniforme (cu)	
convergence presque partout (cpp)	convergence presque sûre (cps)
convergence presque uniforme (cpu)	
convergence en mesure (cm)	convergence en probabilité (cp)

On a les implications suivantes :

Terminologie analyste	**Terminologie probabiliste**
(cu) ⇒ (cs) ⇒ (cpp)	
(cu) ⇒ (cpu) ⇒ (cpp)	
(cpp) ⇒ (cpu) si la mesure est finie	
(cm) ⇒ (cpu) pour une sous-suite	(cp) ⇒ (cps) pour une sous-suite
(cpp) ⇒ (cm) si la mesure est finie	(cps) ⇒ (cp)
(cpu) ⇒ (cm)	

Exercice 3.22 (De loi uniforme à loi donnée) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. et U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Soit F la fonction de répartition de X (*i.e.* $F(x) = P(X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$). Pour $u \in \mathbb{R}$, on définit $G(u)$ de la manière suivante :

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\},\ \text{si } u \in]0,1[,$$
$$G(u) = 0,\ \text{si } u \notin]0,1[.$$

On pose $Y = G(U)$ (c'est-à-dire $Y(\omega) = G(U(\omega))$ pour tout $\omega \in E$).

1. Soit $u \in]0,1[$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\} \neq \emptyset$, $\inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\} \in \mathbb{R}$ et

$$\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\} = [G(u), +\infty[.$$

Corrigé – *Grâce à la propriété de continuité croissante d'une mesure (proposition 2.27) on sait que* $F(x) \to 1$ *quand* $x \to +\infty$. *Il existe donc* $x_1 \in \mathbb{R}$ *tel que* $F(x) \geq u$ *pour tout* $x \geq x_1$, *ce qui prouve que* $\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\} \neq \emptyset$ *(et* $G(u) \leq x_1$*).*

Grâce à la propriété de continuité décroissante d'une mesure (proposition 2.27) on sait que $F(x) \to 0$ *quand* $x \to -\infty$. *Il existe donc* $x_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* $F(x) \leq u$ *pour tout* $x \leq x_2$, *ce qui prouve que* $\inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\} \in \mathbb{R}$ *(et* $G(u) \geq x_2$*).*

Comme F *est une fonction croissante, l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\}$ *est donc un intervalle dont les bornes sont* $G(u)$ *et* $+\infty$. *Enfin, la continuité décroissante de* F *donne la continuité à droite de* F *et donc le fait que* $G(u) \in \{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\}$, *ce qui donne bien*

$$\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\} = [G(u), +\infty[.$$

2. Montrer que Y est une v.a.r..

Corrigé – *La fonction* G *est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *croissante sur* $]0,1[$ *et nulle sur le complémentaire de* $]0,1[$. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *l'ensemble* $G^{-1}([\alpha, +\infty[)$ *est donc un intervalle inclus dans* $]0,1[$ *auquel on ajoute* $]0,1[^c$ *si* $\alpha \leq 0$. *On a donc*

$$G^{-1}([\alpha, +\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ceci prouve que G *est une fonction borélienne. Par composition de fonctions mesurable,* $G(U)$ *est donc mesurable de* E *muni de la tribu* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la tribu borélienne. Ceci montre que* $G(U)$ *est une v.a.r.*

3. Montrer que Y a la même loi que X. [On pourra montrer que $P(G(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Corrigé – *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* $u \in]0,1[$, *la question 1 montre que*

$$F(x) \geq u \iff x \geq G(u).$$

On a donc, pour $\omega \in E$,

$$U(\omega) \in]0,1[\text{ et } F(x) \geq U(\omega) \iff U(\omega) \in]0,1[\text{ et } x \geq G(U(\omega))$$

Comme U *a pour loi* $\mathcal{U}([0,1])$, *on a* $P(\{\omega \in E \text{ t.q. } U(\omega) \notin]0,1[\}) = 0$. *L'égalité précédente donne donc*

$$P(\{\omega \in E \text{ t.q. } F(x) \geq U(\omega)\}) = P(\{\omega \in E \text{ t.q. } x \geq G(U(\omega))\}).$$

c'est-à-dire $P(G(U) \le x) = P(U \le F(x))$. *Enfin, soit* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ *et* $F(x) \in [0,1]$ *on a* $P(U \le F(x)) = F(x)$. *On a donc* $P(G(U) \le x) = F(x) = P(X \le x)$. *Les v.a.r.* X *et* Y *ont même fonction de répartition et donc même loi.*

Exercice 3.23 (Limite croissante d'une suite de v.a.r.) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, Y une v.a.r., $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une application de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \uparrow X$, quand $n \to +\infty$, et que X_n et Y sont indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X est une v.a.r. et que X et Y sont indépendantes. (*N.B.* La conclusion est encore vraie sans la croissance de la suite X_n.)

Corrigé – *La fait que* X *soit une v.a.r. découle des propriétés de stabilité des fonctions mesurables (voir la proposition 3.19).*

Rappel *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On rappelle que* $X^{-1}(A) = \{\omega \in E \text{ t.q. } X(\omega) \in A\}$. *Cet ensemble est souvent noté, de manière abrégée,* $\{X \in A\}$. *On rappelle aussi que (par définition) deux v.a.r.,* X *et* Y, *sont indépendantes si* $\sigma(X)$ *et* $\sigma(Y)$ *sont indépendantes, c'est-à-dire si*

$$P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A))P(Y^{-1}(B)) \text{ pour tout } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

La démonstration du fait que X *et* Y *sont indépendantes se fait alors deux étapes. Dans une première étape, on montre que* X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si*

$$P(\{X \le a\} \cap \{Y \le b\}) = P(\{X \le a\})P(\{Y \le b\}) \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \tag{3.4}$$

Cette étape (un peu difficile à ce niveau du cours), très intéressante, est une conséquence de la proposition 2.31.

On conclut à l'indépendance de X *et* Y *dans la deuxième étape.*

Étape 1 *Il est clair que si* X *et* Y *sont indépendantes, on a bien (3.4). Ceci est dû au fait que* $]-\infty, c]$ *est un borélien de* $\mathbb{R}$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$.

On suppose maintenant que X *et* Y *sont deux v.a.r. satisfaisant (3.4) et on va montrer qu'elles sont indépendantes.*

On pose $\mathcal{C} = \{]-\infty, c],\ c \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, +\infty[\}$. *On sait que* $\mathcal{C}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Il est clair que* $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie et que* $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$. *La proposition 2.31 nous donne donc que deux mesures finies sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *égales sur* $\mathcal{C}$ *sont égales sur tout* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On va utiliser deux fois cette proposition.*

Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on pose*

$$m(A) = P(\{X \in A\} \cap \{Y \le b\}),\ \mu(A) = P(\{X \in A\})P(\{Y \le b\}).$$

Il est facile de voir que m *et* μ *sont deux mesures finies sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *égales sur* $\mathcal{C}$. *La proposition 2.31 donne alors* $m = \mu$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *on a donc*

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \le b\}) = P(\{X \in A\})P(\{Y \le b\})$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(R)$ *et tout* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *On fixe maintenant* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et on pose pour* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\tilde{m}(B) = P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}),\ \tilde{\mu}(B) = P(\{X \in A\})P(\{Y \in B\}).$$

Il est facile aussi de voir que $\tilde{m}$ *et* $\tilde{\mu}$ *sont deux mesures finies sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *égales sur* $\mathcal{C}$. *La proposition 2.31 donne alors* $\tilde{m} = \tilde{\mu}$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *on a donc finalement*

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\})P(\{Y \in B\}) \text{ pour tout } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

ce qui prouve que X *et* Y *sont indépendantes.*

Étape 2 *Soit* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *On veut montrer que* $P(\{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\}) = P(\{X \leq a\})P(\{Y \leq b\})$. *Comme* X_n *et* Y *sont indépendantes, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$P(\{X_n \leq a\} \cap \{Y \leq b\}) = P(\{X_n \leq a\})P(\{Y \leq b\}). \tag{3.5}$$

La suite X_n *étant croissante, on a* $\{X_{n+1} \leq a\} \subset \{X_n \leq a\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Comme la suite* X_n *converge simplement et en croissant vers* X, *on a* $\{X \leq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \leq a\}$. *La continuité décroissante de* P *donne alors*

$$P(\{X \leq a\}) = \lim_{n \to +\infty} P(\{X_n \leq a\}).$$

De même, on a $(\{X_{n+1} \leq a\} \cap \{Y \leq b\}) \subset (\{X_n \leq a\} \cap \{Y \leq b\})$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(\{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\{X_n \leq a\} \cap \{Y \leq b\})$. *La continuité décroissante de* P *donne aussi*

$$P(\{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\}) = \lim_{n \to +\infty} P(\{X_n \leq a\} \cap \{Y \leq b\}).$$

En passant à la limite dans (3.5), on obtient donc $P(\{X < a\} \cap \{Y < b\}) = P(\{X < a\})P(\{Y < b\})$. *Grâce à l'étape 1, on a donc bien montré l'indépendance de* X *et* Y.

Exercice 3.24 (Construction de v.a.i. de lois uniformes) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite de v.a.r.i.i.d. avec $P(U_n = 0) = P(U_n = 1) = 1/2$. Montrer que V, définie par $V = \sum_{n \geq 1} U_n 2^{-n}$ est une v.a. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
2. Soit $U_{n,k}$, $n, k \geq 1$, des v.a.r.i.i.d. avec $P(U_{n,k} = 0) = P(U_{n,k} = 1) = 1/2$. Montrer que les v. a. V_n, $n \geq 1$ définies par $V_n = \sum_{k \geq 1} U_{n,k} 2^{-k}$ sont des v.a.r.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 3.25 (Loi du produit de la loi exponentielle par ± 1**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire que la fonction de répartition de X est donnée, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par $P(\{X \leq a\}) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ avec f définie par $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}(x)$. (comme f est continue, il s'agit ici de l'intégrale impropre d'une fonction continue.) Nous verrons au Chapitre 4 que ceci signifie que P_X est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que Y est t. q. $P(\{Y = 1\}) = P(\{Y = -1\}) = 1/2$. Donner la loi de XY.

Corrigé – *Compte tenu de la définition de* P_X *donnée ci dessus, on a* $P(\{X \leq a\}) = 0$ *pour* $a \leq 0$ *et* $P(\{X \leq a\}) = 1 - e^{-a\lambda}$ *pour* $a > 0$.

On calcule maintenant la fonction de répartition de XY *(ce qui détermine la loi de* XY*). Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Comme* Y *ne prend presque sûrement que les valeurs* 1 *et* -1, *on a*

$$P(\{XY \leq a\}) = P(\{Y = 1\} \cap \{X \leq a\}) + P(\{Y = -1\} \cap \{X \geq -a\}).$$

Comme X *et* Y *sont indépendantes et que* $P(\{Y = 1\}) = P(\{Y = -1\}) = 1/2$, *on obtient*

$$P(\{XY \leq a\}) = \frac{1}{2} P(\{X \leq a\}) + \frac{1}{2} P(\{X \geq -a\}).$$

On en déduit que pour $a \le 0$ on a $P(\{XY \le a\}) = \frac{1}{2}e^{a\lambda}$ et pour $a > 0$, on a $P(\{XY \le a\}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-a\lambda}$. Ceci montre que la fonction de répartition de XY est donnée, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par $P(\{XY \le a\}) = \int_{-\infty}^{a} g(t)dt$ avec g définie par $g(x) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)$. (c'est-à-dire que la loi de la v.a.r. XY a aussi une densité, par rapport à la mesure de Lebesgue, et cette densité est la fonction g.)

Exercice 3.26 (Convergence en mesure) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..

   [On pourra commencer par montrer que, pour tout $\delta > 0$, $m(\{x \in E ; |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$.]

   Corrigé – *Pour $h : E \to \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on note toujours $\{h > \delta\} = \{x \in E ; h(x) > \delta\}$, $\{h \ge \delta\} = \{x \in E ; h(x) \ge \delta\}$, $\{h < \delta\} = \{x \in E ; h(x) < \delta\}$ et $\{h \le \delta\} = \{x \in E ; h(x) \le \delta\}$.*

   Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(x) - g(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$. On en déduit $\{|f - f_n| \le \frac{\delta}{2}\} \cap \{|f_n - g| \le \frac{\delta}{2}\} \subset \{|f - g| \le \delta\}$ et donc, en passant au complémentaire,

$$\{|f - g| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\}. \tag{3.6}$$

   Par sous additivité de m, on a donc $m(\{|f - g| > \delta\}) \le m(\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\})$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $m(\{|f - g| > \delta\}) = 0$.

   On remarque maintenant que $\{x \in E ; f(x) \neq g(x)\} = \{|f - g| > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{|f - g| > \frac{1}{n}\}$ et donc, par σ-sous additivité de m, on obtient $m(\{x \in E ; f(x) \neq g(x)\}) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(\{|f - g| > \frac{1}{n}\}) = 0$ et donc $f = g$ p.p..

2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.

   Corrigé – *Soit $\delta > 0$. En reprenant la démonstration de (3.6), on montre que*

$$\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\}.$$

   Par sous additivité de m, ceci donne $m(\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\}) \le m(\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\})$ et donc que $m(\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a bien montré que $f_n + g_n \to f + g$ en mesure quand $n \to +\infty$.

3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f\,g \in \mathcal{M}$.
   [On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a $m(\{x \in \mathrm{E}\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$.] Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(\mathrm{E}) = +\infty$.

Corrigé – *Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la démonstration de (3.6) donne ici $\{|f_n| > k\} \subset \{|f| > \frac{k}{2}\} \cup \{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}$ et donc*

$$m(\{|f_n| > k\}) \leq m(\{|f| > \frac{k}{2}\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}. \tag{3.7}$$

On pose $\mathrm{A}_k = \{|f| > \frac{k}{2}\}$. On a $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$, $\mathrm{A}_{k+1} \subset \mathrm{A}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_k = \emptyset$ (car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme E est de mesure finie, on a $m(\mathrm{A}_k) < \infty$ (pour tout k) et on peut appliquer la continuité décroissante de m. Elle donne :

$$m(\mathrm{A}_k) \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{3.8}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par (3.8), il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(\mathrm{A}_{k_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par la convergence en mesure de f_n vers f, il existe alors n_0 tel que $m(\{|f_n - f| > \frac{k_0}{2}\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_0$ et l'inégalité (3.7) donne $m(\{|f_n| > k_0\}) \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. On en déduit (comme $\{|f_n| > k\} \subset \{|f_n| > k_0\}$ si $k \geq k_0$) :

$$n \geq n_0,\ k \geq k_0 \Rightarrow m(\{|f_n| > k\}) \leq \varepsilon. \tag{3.9}$$

On montre maintenant que $f_n g_n \to f\,g$ en mesure.

Soit $\delta > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n g_n - f\,g| > \delta\} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour cela, on remarque que $|f_n g_n - f\,g| \leq |f_n||g_n - g| + |g||f_n - f|$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\{|f_n| \leq k\} \cap \{|g_n - g| \leq \frac{\delta}{2k}\} \cap \{|g| \leq k\} \cap \{|f_n - f| \leq \frac{\delta}{2k}\} \subset \{|f_n g_n - f\,g| \leq \delta\}$$

et, en passant au complémentaire,

$$\{|f_n g_n - f\,g| > \delta\} \subset \{|f_n| > k\} \cup \{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| > k\} \cup \{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m(\{|f_n g_n - f\,g| > \delta\}) \leq\ & m(\{|f_n| > k\}) + m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \\ & + m(\{|g| > k\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k_0 et n_0 de manière à avoir (3.9). En utilisant (3.8) avec g au lieu de f, il existe aussi k_1 tel que $m(\{|g| > k\}) \leq \varepsilon$ pour $k \geq k_1$. On choisit alors $k = \max\{k_0, k_1\}$. En utilisant la convergence en mesure de f_n vers f et de g_n vers g, il existe n_1 tel que $m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \leq \varepsilon$ et $m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_1$. Finalement, avec $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ on obtient :

$$n \geq n_2 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - f\,g| > \delta\}) \leq 4\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence en mesure de $f_n g_n$ vers fg, quand $n \to +\infty$.

Pour obtenir un contre-exemple à ce résultat si $m(\mathrm{E}) = \infty$, on prend $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \geq 1$ on définit f_n par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on définit g_n par $g_n(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $f_n \to 0$ en mesure, $g_n \to g$ en mesure, avec $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f_n g_n \not\to 0$ en mesure car $m(\{|f_n g_n| > \delta\}) = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\delta > 0$.

Exercice 3.27 (Convergence p.u. et convergence p.p.) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}_n) \leq \frac{1}{n}$ et $f_n \to f$ uniformément sur A_n^c. On pose $\mathrm{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$, de sorte que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et $m(\mathrm{A}) = 0$ car $m(\mathrm{A}) \leq m(\mathrm{A}_n) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Soit $x \in \mathrm{A}^c$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \mathrm{A}_n^c$ et on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$. Comme $m(\mathrm{A}) = 0$, ceci donne bien $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.29 (Convergence en mesure et convergence p.p.) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

1. On suppose dans cette question que $m(\mathrm{E}) < +\infty$.

(a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [Utiliser le théorème d'Egorov.]

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = m(\{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$, quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire que*

$$\begin{aligned} &\forall \delta > 0,\ \exists n_0,\ t.q. \\ &n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \delta. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Soit donc $\delta > 0$. D'après le théorème d'Egorov (théorème 3.39 page 133), il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. La convergence uniforme sur A^c nous donne donc l'existence de n_0 tel que, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{A}^c$, si $n \geq n_0$. On a donc, pour $n \geq n_0$, $\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset \mathrm{A}$, et donc $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq m(\mathrm{A}) \leq \delta$. On a bien montré (3.11) et donc la convergence en mesure de f_n vers f, quand $n \to +\infty$.

(b) Montrer par un contre–exemple que la réciproque de la question précédente est fausse.

Corrigé – *L'exemple donné ici sera repris au début de la section 4.7 pour montrer que la convergence dans L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout.*

On prend $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$ (on a bien $m(\mathrm{E}) < \infty$) et on construit ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{(p-1)p}{2} \leq n < \frac{p(p+1)}{2}$. On pose alors $k = n - \frac{(p-1)p}{2}$ et on prend $f_n = 1_{[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[}$. Il faut noter ici que $k+1 \leq \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} = p$ et donc $\frac{k+1}{p} \leq 1$.

Lorsque $n \to +\infty$, on a $p \to \infty$ et donc $m(\{|f_n| > 0\}) = \frac{1}{p} \to 0$, ce qui prouve, en particulier, que $f_n \to 0$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

Enfin, on remarque que, pour tout $x \in [0,1[$, $f_n(x) \not\to 0$ quand $n \to +\infty$. En effet, soit $x \in [0,1[$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors (un unique) $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $x \in [\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[$, de sorte que $f_{\varphi(p)}(x) = 1$ en choisissant $\varphi(p) = \frac{(p-1)p}{2} + k$. On a ainsi construit $(f_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}^*}$, sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car φ est strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$), t.q. $f_{\varphi(p)}(x) \not\to 0$ quand $p \to +\infty$ (puisque $f_{\varphi(p)}(x) = 1$ pour tout p). Ceci montre bien que $f_n(x) \not\to 0$ quand $n \to +\infty$.

On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$ mais on suppose maintenant (pour la suite de l'exercice) que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure c'est-à-dire que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}; p, q \geq n \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}; |f_p(x) - f_q(x)| > \varepsilon\}) \leq \delta.$$

Corrigé –
Notation : Pour g fonction de E *dans* $\mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$, *on note toujours* $\{g > a\}$ *l'ensemble* $\{x \in \mathrm{E};\, g(x) > a\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ *et* $\delta > 0$. *Soit* $p, q \in \mathbb{N}$. *On commence par remarquer que* $|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)|$. *On en déduit que*

$$\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\} \subset \{|f_p - f| > \varepsilon\} \cup \{|f_q - f| > \varepsilon\}.$$

On a donc

$$m(\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\}) \leq m(\{|f_p - f| > \varepsilon\}) + m(\{|f_q - f| > \varepsilon\}).$$

Comme $f_n \to f$ *en mesure, il existe* n_0 *tel que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \delta.$$

On a donc

$$p, q \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\}) \leq 2\delta.$$

Ceci montre bien que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy en mesure.*

3. Montrer qu'il existe une fonction mesurable g et une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) \leq \varepsilon$ et tel que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur A^c.

[On pourra construire φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T t.q. $m(\mathrm{A}_n) \leq 2^{-n}$ avec $\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| > 2^{-n}\}$ pour tout n. Puis, chercher A sous la forme $\bigcup_{k\geq p} \mathrm{A}_k$, où p est convenablement choisi.]

Corrigé – *D'après la question précédente, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy en mesure. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe donc (en prenant* $\varepsilon = \delta = 2^{-n}$ *dans la définition donnée à la question précédente)* $\psi(n) \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$p, q \geq \psi(n) \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| > 2^{-n}\}) \leq 2^{-n}.$$

Pour obtenir, à partir de ψ, *une fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *on choisit alors* $\varphi(0) = \psi(0)$ *et* $\varphi(n) = \max\{\psi(n), \varphi(n-1)+1\}$ *pour* $n \geq 1$. *On obtient bien une fonction* φ *strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *et, comme* $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq \psi(n)$, *on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$m(\mathrm{A}_n) \leq 2^{-n} \text{ avec } \mathrm{A}_n = \{|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}| > 2^{-n}\}.$$

Pour construire la fonction g, on pose maintenant $\mathrm{B}_p = \cup_{k\geq p} \mathrm{A}_k$ *et* $\mathrm{B} = \cap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p$. *On va montrer que pour tout* $x \in \mathrm{B}^c$ *la suite* $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *(et* $g(x)$ *sera alors défini comme étant la limite de cette suite).*

Soit $x \in \mathrm{B}^c$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathrm{B}_p^c$. Ceci donne $x \in \mathrm{A}_k^c$ pour tout $k \geq p$, c'est-à-dire

$$k \geq p \Rightarrow |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq 2^{-k}. \tag{3.12}$$

On en déduit que la série de terme général $f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ et donc que la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. En effet, pour passer de la série à la suite, il suffit de remarquer que

$$f_{\varphi(n)}(x) = f_{\varphi(0)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)). \tag{3.13}$$

On a donc montré que pour tout $x \in \mathrm{B}^c$ la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et on pose alors

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x) \text{ si } x \in \mathrm{B}^c.$$

La fonction g est ainsi définie sur B^c. Pour qu'elle soit définie partout, on pose $g(x) = 0$ sur B. La fonction g est bien mesurable car est la limite simple des fonctions $f_{\varphi(n)}1_{\mathrm{B}^c}$ qui sont toutes mesurables (noter, en particulier, que $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ car les A_n sont tous dans T).

Soit $p \in \mathbb{N}$. On remarque maintenant que sur B_p^c la série de terme général $f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)$ converge uniformément (grâce à (3.12)). La suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc aussi uniformément sur B_p^c (grâce à (3.13)). Or, par σ-sous additivité de m, on a

$$m(\mathrm{B}_p) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} m(\mathrm{A}_k) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-p+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $\mathrm{A} = \mathrm{B}_p$ avec $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-p+1} \leq \varepsilon$ on a donc $m(\mathrm{A}) \leq \varepsilon$ et $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (vers g) sur A^c.

Enfin, on peut aussi remarquer que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers g car $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{B}^c$ et la continuité décroissante de m donne $m(\mathrm{B}) = \lim_{p\to+\infty} m(\mathrm{B}_p) = 0$.

4. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque partout. [On pourra commencer par montrer que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ construite à la question précédente converge presque partout et en mesure.]

Corrigé – *On reprend les notations et résultats du corrigé de la question précédente. On sait déjà que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers g. On montre maintenant qu'elle converge en mesure vers g.*

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $m(\mathrm{B}_p) \leq \delta$. Comme $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B_p^c vers g, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{\varphi(n)}(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in \mathrm{B}_p^c$. On a donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow \{|f_{\varphi(n)} - g| \geq \varepsilon\} \subset \mathrm{B}_p \Rightarrow m(\{|f_{\varphi(n)} - g| \geq \varepsilon\} \leq m(\mathrm{B}_p) \leq \delta.$$

Ceci montre bien que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers g.

Comme on a déjà, par hypothèse, que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, on a donc $f = g$ p.p. (voir la première question de l'exercice 3.26). Finalement, on obtient donc la convergence p.p. de la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

Exercice 3.30 (Convergence en mesure et produit)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lorsque $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne) et u une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $u_n \to u$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que u_n^2 (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et u^2 sont des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *On peut, par exemple, remarquer que les fonctions u_n^2 (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et u^2 sont des produits de fonctions boréliennes. Elles sont donc boréliennes (voir la proposition 3.19).*

2. On suppose, dans cette question, que u est bornée. Il existe donc $C > 0$ telle que $|u(x)| \le C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, $\{|u_n - u] < \delta\} \subset \{|u_n^2 - u^2| < \delta(2C+\delta)$. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ (ne dépendant que de C et ε) tel que (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\} \subset \{|u_n - u| \ge \delta\}$.

   Corrigé – *Soit $\delta > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n(x) - u(x)] < \delta$, on a alors $|u_n(x)| \le |u_n(x) - u(x)| + |u(x)| \le C + \delta$ et donc*

   $$\begin{aligned}|u_n^2(x) - u^2(x)| = |u_n(x) - u(x)||u_n(x) + u(x)| &\le |u_n(x) - u(x)||u_n(x)| + |u(x)| \\ &\le |u_n(x) - u(x)|(2C+\delta) < \delta(2C+\delta).\end{aligned}$$

   Ce qui donne bien $\{|u_n - u] < \delta\} \subset \{|u_n^2 - u^2| < \delta(2C+\delta)$.
   En choisissant $\delta > 0$ tel que $\delta(2C+\delta) \le \varepsilon$ (ce qui est possible car $\lim_{\delta\to 0}\delta(2C+\delta) = 0$), on en déduit

   $$\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\} \subset \{|u_n^2 - u^2| \ge \delta(2C+\delta)\} \subset \{|u_n - u| \ge \delta\}.$$

   (b) Montrer que $u_n^2 \to u^2$ en mesure quand $n \to +\infty$.

   Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que $\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\} \subset \{|u_n - u| \ge \delta\}$ (pour tout n). On a donc $\lambda(\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \le \lambda(\{|u_n - u| \ge \delta\})$. Comme $u_n \to u$ en mesure, on a $\lim_{n\to+\infty}\lambda(\{|u_n - u| \ge \delta\}) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\lambda(\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) = 0$. Ce qui prouve que $u_n^2 \to u^2$ en mesure.*

3. Dans cette question, on ne suppose plus que u est bornée mais on suppose qu'il existe une partie compacte, notée K, de $\mathbb{R}$ telle que $u(x) = 0$ pour tout $x \in K^c$ (une telle fonction est dite "à support compact").

   (a) Donner un exemple d'une fonction u non bornée et à support compact.
   [On pourra, par exemple, prendre $K = [0, 1]$.]

Corrigé – *On peut, par exemple, choisir u définie par $u(x) = 1/x$ si $x \in]0,1[$ et $u(x) = 0$ si $x \notin]0,1[$. La fonction u est non bornée et nulle hors de $[0,1]$ (qui est bien une partie compacte de $\mathbb{R}$).*

(b) Montrer que $\lambda(\mathrm{K}) < +\infty$.

Corrigé – *La partie K est compacte, elle est donc bornée. On choisit alors $a > 0$ tel que $\mathrm{K} \subset [-a,a]$. On en déduit $\lambda(\mathrm{K}) \le 2a < +\infty$.*

(c) Montrer que $\lim_{p\to+\infty} \lambda(\{|u| > p\}) = 0$.

Corrigé – *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{C}_p = \{|u| > p\}$. On a, pour tout p, $\mathrm{C}_{p+1} \subset \mathrm{C}_p$ et $\lambda(\mathrm{C}_p) \le \lambda(\mathrm{K}) < +\infty$ (car $\mathrm{C}_p \subset \mathrm{K}$) et $\cap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_p = \emptyset$. La continuité croissante de λ donne alors que*

$$\lim_{p\to+\infty} \lambda(\mathrm{C}_p) = \lambda(\cap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_p) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

(d) Montrer que $u_n^2 \to u^2$ en mesure quand $n \to +\infty$.
[On pourra commencer par remarquer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, il existe δ, ne dépendant que p et ε, tel que (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\{|u| \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\} \subset \{|u_n - u| \ge \delta\}$.]

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Le raisonnement fait à la question 2(a) montre que pour tout $\delta > 0$ on a*

$$(\{u \le p\} \cap \{|u_n - u] < \delta\}) \subset (\{u \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| < \delta(2p + \delta)\}),$$

et donc qu'il existe $\delta > 0$ (ne dépendant que de p et ε) tel que (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$(\{u \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \subset (\{u \le p\} \cap \{|u_n - u| \ge \delta\}).$$

On en déduit en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\{|u| \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \subset \{|u_n - u| \ge \delta\}. \tag{3.14}$$

On va maintenant montrer que $\lim_{n\to+\infty} \{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\} = 0$.
Soit $\eta > 0$. On choisit d'abord $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(\{|u| > p\}) \le \eta$ et on choisit $\delta > 0$ (ne dépendant que de p et ε et donc que η et ε) tel que (3.14) soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\} \subset \{|u| > p\} \cup (\{u \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \subset \{|u| > p\} \cup \{|u_n - u| \ge \delta\}$$

et donc

$$\lambda(\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \le \lambda(\{|u| > p\}) + \lambda(\{|u_n - u| \ge \delta\}) \le \eta + \lambda(\{|u_n - u| \ge \delta\}).$$

Comme $u_n \to u$ en mesure, il existe n_0 tel que $\lambda(\{|u_n - u| \ge \delta\}) \le \eta$ pour $n \ge n_0$ et donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow \lambda(\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \le 2\eta.$$

Ce qui prouve que $u^2 \to u^2$ en mesure.

(e) On remplace maintenant l'hypothèse $u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{K}^c$ par “Il existe $\mathrm{M} > 0$ telle que $|u(x)| \le \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{K}^c$”. A t-on toujours $u_n^2 \to u^2$ en mesure quand $n \to +\infty$?

Corrigé – *Oui, on a toujours $u_n^2 \to u^2$ en mesure quand $n \to +\infty$. Le raisonnement des questions 3(c) et 3(d) est toujours juste en remarquant, pour la question 3(c), que $\lambda(C_p) < +\infty$ si $p > M$.*

4. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement u_n et u), qu'on peut avoir $u_n^2 \not\to u^2$ en mesure.
[On pourra, par exemple, choisir pour u la fonction $u(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Corrigé – *On prend $u(x) = x$ et $u_n(x) = x + 1/n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien $u_n \to u$ en mesure. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u_n^2(x) - u^2(x) = 2x/n + 1/n^2$. On en déduit que*

$$\lambda(\{u_n^2(x)) - u^2(x)) \geq \varepsilon\}) = +\infty \textit{ pour tout } \varepsilon > 0 \textit{ et tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce qui montre que $u_n^2 \not\to u^2$ en mesure.

Exercice 3.31 (Convergence en mesure et fonctions continues) Cet exercice généralise l'exercice 3.30. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \to X$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. Soit φ une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

On a donc $\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \eta\}$ et

$$m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) \leq m(\{|X_n - X| > \eta\}).$$

Comme $X_n \to X$ en mesure, on a $\lim_{n\to+\infty} m(\{|X_n - X| > \eta\}) = 0$, on a donc aussi

$$\lim_{n\to+\infty} m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Ce qui prouve que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

2. On suppose, dans cette question, que m est finie (par exemple, la mesure m peut être une probabilité, on a alors $m(\Omega) = 1$, les fonctions mesurables sont des v.a.r. et la convergence en mesure est la convergence en probabilité). Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.
[On pourra commencer par remarquer que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|X| \geq a\}) = 0$.]

Corrigé – *Le fait que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|X| \geq a\}) = 0$ est une conséquence de la continuité décroissante d'une mesure (on utilise ici que m est finie).*

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $m(\{|X| \geq a\}) \leq \delta$. Comme φ est uniformément continue sur $[-a-1, a+1]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$x, y \in [-a-1, a+1], |x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

En posant $\bar{\eta} = \min\{\eta, 1\} > 0$, on a aussi

$$x \in [-a, a], |x - y| \leq \bar{\eta} \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

On a donc $\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \bar\eta\} \cup \{|X| \geq a\}$ *et*

$$m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) \leq m(\{|X_n - X| > \bar\eta\}) + m(\{|X| \geq a\})$$
$$\leq m(\{|X_n - X| > \bar\eta\}) + \delta.$$

Comme $X_n \to X$ *en mesure, on a* $\lim_{n\to+\infty} m(\{|X_n - X| > \bar\eta\}) = 0$*, il existe donc* n_0 *tel que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|X_n - X| > \bar\eta\}) \leq \delta.$$

on a donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) \leq 2\delta.$$

Ce qui prouve que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ *en mesure, quand* $n \to +\infty$*.*

3. On prend ici $(\Omega, \mathcal{A}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement X_n et X), qu'on peut avoir $X_n \to X$ en mesure (quand $n \to +\infty$) et $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ en mesure pour certaines fonctions φ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *On prend* $X(x) = x$ *et* $X_n(x) = x + 1/n$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*. On a bien* $X_n \to X$ *en mesure. On choisit* φ *définie par* $\varphi(x) = x^2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a donc, pour* $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(X_n(x)) - \varphi(X(x)) = 2x/n + 1/n^2$*. On en déduit que*

$$\lambda(\{\varphi(X_n(x)) - \varphi(X(x)) \geq \varepsilon\}) = +\infty \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce qui montre que $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ *en mesure.*

Chapitre 4

Fonctions intégrables

Maintenant qu'on a construit un espace mesuré (E, T, m) (dont un exemple fondamental est $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), on voudrait généraliser la notion d'intégrale grâce à cet espace, c'est-à-dire introduire une application qui à f, fonction de E dans $\mathbb{R}$, associe un réel, dépendant de la mesure m, que nous noterons $\int f dm$, tel que :

— Si $f = 1_A$, $A \in T$, alors $\int f dm = m(A)$,

— L'application ainsi définie soit linéaire, c'est-à-dire que pour toutes fonctions f et g définies de E dans $\mathbb{R}$,

$$\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm, \ \forall \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

En fait, on ne peut pas définir une telle application sur *toutes* les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, nous allons la définir seulement sur les fonctions que nous appellerons "intégrables".

La construction de cette nouvelle intégrale se déroule, comme pour l'intégrale des fonctions continues décrite au chapitre 1 en 3 étapes, que nous pouvons dans le cas (non limitatif) des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, décrire ainsi :

1. Mesurer presque toutes les parties de $\mathbb{R}$ (et pas seulement les intervalles).
2. Définir l'intégrale des fonctions étagées, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (et pas seulement des fonctions en escalier).
3. Par un passage à la limite, définir l'intégrale des fonctions limites (en un sens convenable) de fonctions étagées.

Pour être plus précis, dans l'étape 1 ci-dessus, on cherche une application

$$\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta. \tag{4.1}$$

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathrm{A}_n),\ \forall (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset \text{ si } n \neq m. \tag{4.2}$$

(Dans toute la suite de ce cours, la notation $\sum_{n\in\mathrm{N}}$ est identique à $\sum_{n=0}^{+\infty}$.)

Une telle application sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'existe pas (voir l'exercice 2.29), mais on sait qu'elle existe si on se limite à une partie convenable de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, par exemple, la tribu de Borel définie précédemment.

Pour l'étape 2, on intégrera les fonctions prenant un nombre fini de valeurs et pour lesquelles chaque étage est dans la tribu de Borel et est de mesure finie. De telles fonctions seront dites étagées et intégrables.

Enfin, à l'étape 3, l'idée principale est de définir l'intégrale des fonctions positives qui sont limites croissantes d'une suite de fonctions étagées (on remplace donc la convergence uniforme utilisée pour la définition de l'intégrale des fonctions réglées par une convergence simple en croissant).

4.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré. On rappelle que $\mathcal{E}_+$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}$, ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Si $f \in \mathcal{E}_+$, f non nulle, le lemme 3.6 nous donne, en particulier, l'existence d'une famille $(a_i, \mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, et $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$. D'autre part, le lemme 3.7 nous permet d'affirmer que, pour une fonction étagée positive qu'on écrit sous la forme : $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$, où les A_i sont deux à deux disjoints et les a_i sont strictement positifs, la valeur $\sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i)$ est indépendante de la décomposition choisie. On peut donc définir l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction de $\mathcal{E}_+$) *Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et soit f de E dans $\mathbb{R}$ une fonction étagée positive non nulle (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}_+$). Soient $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ une famille de parties disjointes deux à deux (i.e. t.q. $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et n réels $a_1,\ldots,a_n$ strictement positifs tels que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$. On définit l'intégrale de f, qu'on note $\int f\,dm$, par : $\displaystyle\int f\,dm = \sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i)$ (on a donc $\int f\,dm \in \overline{\mathbb{R}}_+$). D'autre part, si $f = 0$, on pose $\int f\,dm = 0$.*

Remarque 4.2 En adoptant la convention $0 \times +\infty = 0$, on peut aussi remarquer que si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, où la famille $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ est t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et où les réels $a_1, \ldots, a_n$ sont supposés positifs seulement, on a encore :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i).$$

Proposition 4.3 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{E}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*

— *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$, et $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,*

— *monotonie : $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.*

DÉMONSTRATION – Il est facile de montrer que si $f \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et $\int \alpha f dm = \alpha \int f dm$. Pour montrer la linéarité positive, il suffit donc de considérer le cas $\alpha = \beta = 1$ et f et g non nulles. Soit donc $f, g \in \mathcal{E}_+$, non nulles. D'après le lemme 3.6 sur la décomposition canonique des fonctions étagées positives non nulles, on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \text{ et } g = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j},$$

avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$ pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $0 < b_1 < \ldots < b_m$, $B_j \neq \emptyset$ pour tout j, $B_j \cap B_i = \emptyset$ si $j \neq i$. En posant $a_0 = b_0 = 0$, $A_0 = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$ et $B_0 = (\bigcup_{j=1}^{n} B_j)^c$, on a aussi

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{m} b_j 1_{B_j}$$

et on peut écrire

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j} = \sum_{(i,j) \in K} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j},$$

avec $K = \{(i,j) \in \{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\} \setminus (0,0)\}$.
On a donc $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int (f+g) dm = \sum_{(i,j) \in K} (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\int (f+g) dm &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} b_j m(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j m(B_j)
\end{aligned}$$

(car $(A_0, \ldots, A_n)$ et $(B_0, \ldots, B_m)$ sont des partitions de E). On a donc bien montré que

$$\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

Il reste à montrer la monotonie. Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f \geq g$. On a donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ (on rappelle que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, voir la proposition 3.9) ; et comme $\int (f-g)dm \geq 0$, la linéarité positive nous donne que

$$\int f dm = \int (f-g)dm + \int g dm \geq \int g dm.$$

. ■

Remarque 4.4

1. Une conséquence directe de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, si $f \in \mathcal{E}_+$, pour n'importe quelle décomposition de f : $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, $a_1, ..., a_n \geq 0$ et $(A_i)_{i=1,...,n} \subset T$ (on ne suppose plus $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a encore, par linéarité positive :
$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i \int 1_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i),$$
en posant $a_i m(A_i) = 0$ si $a_i = 0$.
2. Une conséquence de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, pour tout $f \in \mathcal{E}_+$, on a :
$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On donne maintenant un petit lemme fondamental qui va permettre de définir l'intégrale des fonctions de $\mathcal{M}_+$.

Lemme 4.5 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, *et* $g \in \mathcal{E}_+$, *tels que :*

- $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et tout* $x \in E$,
- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \geq g(x)$, *pour tout* $x \in E$,

alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \geq \int g dm. \tag{4.3}$$

Noter que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante de* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *donc sa limite existe dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$.

DÉMONSTRATION – Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cette limite existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$). Il se peut que $f \notin \mathcal{E}_+$, mais on a toujours $f \in \mathcal{M}_+$ et les hypothèses du lemme donnent $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

Soit $\alpha \in]0,1[$, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}\,;\, \alpha g(x) \le f_n(x)\}.$$

On a donc

$$\mathrm{A}_n = (f_n - \alpha g)^{-1}([0,+\infty[) \in \mathrm{T}, \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$$

(car $f_n \le f_{n+1}$) et $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. En effet, si $x \in \mathrm{E}$, on distingue deux cas :

1. Si $g(x) = 0$, alors $x \in \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$,
2. Si $g(x) > 0$, on a alors

$$\alpha g(x) < g(x) \le \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Il existe donc n_x (dépendant de x) tel que $x \in \mathrm{A}_n$ pour $n \ge n_x$. Donc, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$.

On a donc bien montré que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$

(Comme $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi remarquer que la suite de fonctions $(\alpha g 1_{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et en croissant vers la fonction αg.)

On remarque maintenant que $\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} \in \mathcal{E}_+$, $f_n \in \mathcal{E}_+$ et que, grâce à la définition de A_n, on a $\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} \le f_n$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne donc :

$$\int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm \le \int f_n dm. \tag{4.4}$$

En utilisant la décomposition canonique de g (lemme 3.6), il existe une famille $(b_i, \mathrm{B}_i)_{i=1,\ldots,p}$ telle que $0 < b_1 < \ldots < b_p$, $\mathrm{B}_i \neq \emptyset$ pour tout i, $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $g = \sum_{i=1}^p b_i 1_{\mathrm{B}_i}$. On a donc

$$\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} = \sum_{i=1}^p \alpha b_i 1_{\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n}$$

et donc :

$$\int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n).$$

Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_i \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_i \cap \mathrm{E} = \mathrm{B}_i$, la continuité croissante de m donne $m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) \to m(\mathrm{B}_i)$, quand $n \to +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i) = \int \alpha g dm.$$

On peut donc passer à la limite, quand $n \to +\infty$, dans (4.4) et obtenir :

$$\int \alpha g dm \le \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

Enfin, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne $\int \alpha g dm = \alpha \int g dm$. On conclut la démonstration du lemme en faisant tendre α vers 1. ∎

Remarque 4.6 Dans la démonstration précédente, on a besoin de $\alpha < 1$ pour pouvoir écrire $\alpha g(x) \leq f_n(x)$ pour $n \geq n_x$, avec $n_x \in \mathbb{N}$ pouvant dépendre de x. Un tel n_x pourrait ne pas exister en prenant $\alpha = 1$.

Le lemme suivant est une conséquence simple du lemme 4.5.

Lemme 4.7 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$*. Soient deux suites* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}_+$ *convergeant simplement et en croissant vers* f*. On a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm. \tag{4.5}$$

DÉMONSTRATION –
On applique le lemme 4.5 avec $g = g_p$, p fixé. On obtient $\int g_p dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm$. Puis, en passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient :

$$\lim_{p\to+\infty} \int g_p dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

On obtient enfin (4.5) en changeant les rôles de f_n et g_p. ■

Le lemme 4.7 permet donc de définir l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.8 (Intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, et* $f \in \mathcal{M}_+$*. D'après la proposition sur la mesurabilité positive, il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *telle que* $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$*, c'est-à-dire :*

- *Pour tout* $x \in E$*,* $f_n(x) \to f(x)$*, quand* $n \to +\infty$*,*
- $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$*, pour tout* $x \in E$*, et tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

On définit l'intégrale de f *en posant :*

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \quad (\in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

On a aussi la caractérisation suivante, parfois bien utile, de l'intégrale d'une fonction mesurable positive à partir d'intégrales de fonctions étagées positives :

Lemme 4.9 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$*. Alors*

$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

DÉMONSTRATION – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne que $\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f_n\}$ (voir la remarque 4.4). Comme $f_n \leq f$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f_n\} \leq \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

La définition de $\int f dm$ donne alors :

$$\int f dm \leq \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, considérons une fonction $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$. Comme $f_n \uparrow f$, le lemme 4.5 donne

$$\int g dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm.$$

On a donc

$$\sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\} \leq \int f dm.$$

■

Proposition 4.10 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{M}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*

- *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$, et $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,*
- *monotonie : $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.*

DÉMONSTRATION – La linéarité positive se démontre de manière très simple à partir de la linéarité positive sur $\mathcal{E}_+$ (proposition 4.3). et de la définition 4.8.

La monotonie est une conséquence immédiate du lemme 4.9. ■

Remarque 4.11 (A propos de $(+\infty) \times 0 \ldots$) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \in T$ tel que $m(A) = 0$. On note I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A. Cette fonction est définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par : $I_A(x) = +\infty$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Cette fonction est souvent notée aussi $(+\infty)1_A$. Il est clair que $I_A \in \mathcal{M}_+$ et que I_A est la limite croissante de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ définie par $f_n = n1_A$. On en déduit, en utilisant la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int I_A dm = 0$.

Une conséquence de cette remarque est le lemme suivant :

Lemme 4.12 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$. On note $f1_A \in \mathcal{M}_+$ la fonction définie par $f1_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $f1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$. On définit $\int_A f dm$ par $\int f1_A dm$. On suppose que $m(A) = 0$. Alors, $\int_A f dm = 0$.*

2. *Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors, $\int f dm = \int g dm$.*
3. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = 0$.*

DÉMONSTRATION – 1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$ tel que $m(A) = 0$. Soit I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A (définie dans la remarque 4.11). On a évidemment $f 1_A \le I_A$ et donc, par monotonie, $\int f 1_A dm = 0$.

2. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f 1_{A^c} = g 1_{A^c}$. On a donc $f 1_{A^c}, g 1_{A^c} \in \mathcal{M}_+$ et $\int f 1_{A^c} dm = \int g 1_{A^c} dm$. D'autre part, comme $\int f 1_A dm = \int g 1_A dm = 0$, on a aussi, par linéarité positive

$$\int f dm = \int f 1_{A^c} dm + \int f 1_A dm = \int f 1_{A^c} dm$$

(et de même pour g). Donc,

$$\int f dm = \int g dm.$$

3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$. ■

Ce lemme nous permet d'étendre la définition de l'intégrale à certaines fonctions non mesurables :

Définition 4.13 (Intégrabilité sans mesurabilité) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et f définie sur A^c, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+$), avec $A \in T$, $m(A) = 0$ (on dit que f est définie p.p., car f n'est pas définie sur A).*

1. *f est m-mesurable (resp. m-mesurable positive) s'il existe $g \in \mathcal{M}$ (resp. $g \in \mathcal{M}_+$) t.q. $f = g$ p.p.. (c'est-à-dire qu'il existe $B \in T$ tel que $m(B) = 0$, $B \supset A$ et $f = g$ sur B^c).*
2. *Soit f m-mesurable positive. On pose $\int f dm = \int g dm$, avec $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p. (noter que cette intégrale ne dépend pas du choix de g, grâce au lemme 4.12).*

Remarque 4.14 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Il est facile de montrer les résultats suivants :

1. Soit f de E dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $f \in \mathcal{E}_+$ si et seulement si $f \in \mathcal{M}_+$, $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im} f) < +\infty$.
2. Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\mathbb{R}$. Alors, f est m-mesurable si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p. (voir l'exercice 4.18).
3. Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, f est m-mesurable positive si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Le résultat suivant sera souvent utile par la suite. En particulier, les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev (voir la section 4.9) en découlent facilement.

Lemme 4.15 *Soient* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $t \in \mathbb{R}_+^*$ *; alors :*

$$m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t}\int f\,dm. \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION – On définit $\mathrm{A}_t = \{f \geq t\} = \{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) \geq t\}$. On a $\mathrm{A}_t \in \mathrm{T}$ et $f \geq t1_{\mathrm{A}_t}$. Par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit l'inégalité 4.6. ■

4.3 Convergence monotone et lemme de Fatou

Théorème 4.16 (Convergence monotone (1)) *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \mathrm{E}$*. On pose, pour tout* $x \in \mathrm{E}$*,* $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$*. Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\int f_n dm \to \int f\,dm$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*

DÉMONSTRATION –
Noter que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$, le fait que $\int f_n dm \to \int f\,dm$, lorsque $n \to +\infty$, est donné par la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$. La difficulté est donc ici de travailler avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ au lieu de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ converge simplement et en croissant vers f, la proposition 3.19 donne $f \in \mathcal{M}_+$. Puis, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n dm \leq \int f\,dm.$$

Il reste donc à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n dm \geq \int f\,dm. \tag{4.7}$$

Pour montrer (4.7), on va construire une suite de fonctions $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q $g_p \uparrow f$, quand $p \to \infty$, et $g_p \leq f_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{M}_+$; il existe une suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_{n,p} \uparrow f_n$ lorsque p tend vers $+\infty$. On définit alors :

$$g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p}$$

On note que :

1. $g_p \in \mathcal{E}_+$ car g_p est le sup d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}_+$ (donc g_p est mesurable, $\mathrm{Im}(g_p) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(g_p)) < \infty$, ce qui donne $g_p \in \mathcal{E}_+$).

2. $g_{p+1} \geq g_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, comme $f_{n,p+1} \geq f_{n,p}$ (pour tout n et p), on a
$$g_{p+1} = \sup\{f_{p+1,p+1}, \sup_{n\leq p} f_{n,p+1}\} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p+1} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p} = g_p.$$
On peut donc définir, pour $x \in E$, $g(x) = \lim_{p\to\infty} g_p(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (car la suite $(g_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).
3. $g = f$. En effet, on remarque que $g_p \geq f_{n,p}$ si $n \leq p$. On fixe n et on fait tendre p vers l'infini, on obtient $g \geq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to +\infty$ on en déduit $g \geq f$. D'autre part, on a $f_{n,p} \leq f_n \leq f$ pour tout n et tout p. On a donc $g_p \leq f$ pour tout p. En faisant $p \to \infty$ on en déduit $g \leq f$. On a bien montré que $f = g$.
4. $g_p \leq f_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, $f_{n,p} \leq f_n \leq f_p$ si $n \leq p$. On a donc $g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p} \leq f_p$.

Les points 1 à 3 ci-dessus donnent $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ et $g_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. Donc, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm$.

Le point 4 donne (par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) $\int g_p dm \leq \int f_p dm$, on en déduit
$$\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm \leq \lim_{p\to\infty} \int f_p dm.$$
Finalement, on obtient bien $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int f_p dm$. ■

On utilisera souvent une légère extension (facile) du théorème de convergence monotone, où l'on suppose seulement une convergence en croissant presque partout de la suite de fonctions :

Théorème 4.17 (Convergence Monotone (2)) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $f_n \uparrow f$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$ *et* $f_n(x) \uparrow f(x)$ *pour tout* $x \in A^c$*). La fonction* f *(définie p.p.) est alors* $m-$*mesurable positive (c'est-à-dire que il existe* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$. *On rappelle que, par définition (voir la définition 4.13),* $\int f dm = \int g dm$ *avec* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p..*

DÉMONSTRATION – Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f_n \uparrow f$ sur A^c, quand $n \to +\infty$. On pose $g_n = f_n 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g_n(x) = f_n(x)$ si $x \in A^c$ et $g_n(x) = 0$ si $x \in A$). On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec $g = f 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ si $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in A$). Comme $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p., on a donc f $m-$mesurable positive. Puis, le théorème 4.16 donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to +\infty$. D'autre part, on a $\int g_n dm = \int f_n dm$ (car $f_n = g_n$ p.p.) et $\int g dm = \int f dm$ (par définition de $\int f dm$), donc
$$\int f_n dm \to \int f dm.$$
■

Corollaire 4.18 (Séries à termes positifs ou nuls) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *; on pose, pour tout* $x \in E$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\int f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n dm$.

DÉMONSTRATION – On applique le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$g_n = \sum_{p=0}^{n} f_p.$$

On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow f$. Donc $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\sum_{p=0}^{n} \int f_p dm = \int g_n dm \to \int f dm.$$

■

Lemme 4.19 (Fatou) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$.

On pose, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} f_p(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Alors $f \in \mathcal{M}_+$ *et*

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm).$$

DÉMONSTRATION – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x)$ (pour tout $x \in E$), de sorte que $g_n \in \mathcal{M}_+$ (cf. proposition 3.19) et $g_n \uparrow f$. Le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int f dm$.

Or, $g_n \leq f_p$ si $p \geq n$. On a donc $\int g_n dm \leq \int f_p dm$ si $p \geq n$ et donc (en fixant n) $\int g_n dm \leq \inf_{p\geq n} \int f_p dm$. On en déduit

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm \leq \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm) = \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

■

Le lemme de Fatou est souvent utilisé avec des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telles que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour presque tout $x \in \mathrm{E}$. Il permet alors de montrer que la limite (au sens de la convergence p.p.) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est intégrable (voir les paragraphes suivants). On utilise pour cela le corollaire (immédiat) suivant :

Corollaire 4.20 *Soient* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_n(x) \to f(x)$, *pour presque tout* $x \in \mathrm{E}$, *lorsque* $n \to +\infty$. *On suppose qu'il existe* $\mathrm{C} \geq 0$ *tel que* $\displaystyle\int f_n\,dm \leq \mathrm{C}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors,* f *est* m*−mesurable positive et* $\displaystyle\int f\,dm \leq \mathrm{C}$.

Démonstration – Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ et $f_n \to f$ p.p., on a bien f m-mesurable positive. On pose $g = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ (c'est-à-dire $g(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$). On a donc $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p. donc $\int f\,dm = \int g\,dm$ par définition de l'intégrale des fonctions m-mesurables (définition 4.13).

Le lemme de Fatou donne $\int f\,dm = \int g\,dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm$ et donc $\int f\,dm \leq \mathrm{C}$ car $\int f_n dm \leq \mathrm{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

4.4 Mesures et probabilités de densité

4.4.1 Définitions

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

Définition 4.21 (Mesure de densité) *Soient* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Pour* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, *on rappelle que* $f 1_{\mathrm{A}}$ *est la fonction (de* E *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*) définie par* $f 1_{\mathrm{A}}(x) = f(x)$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *et* $f 1_{\mathrm{A}}(x) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}^c$ *(cette fonction appartient à* $\mathcal{M}_+$*) et on définit* $\int_{\mathrm{A}} f\,dm$ *par* $\int f 1_{\mathrm{A}} dm$.

On définit alors $\mu : \mathrm{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *par :*

$$\mu(\mathrm{A}) = \int f 1_{\mathrm{A}} dm = \int_{\mathrm{A}} f\,dm, \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{T}.$$

L'application μ *ainsi définie est une mesure sur* T *(ceci est démontré dans l'exercice 4.26), appelée mesure de densité* f *par rapport à* m, *et notée* $\mu = f m$.

Proposition 4.22 *Soient* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* μ *la mesure de densité* f *par rapport à* m. *Alors, la mesure* μ *est absolument continue par rapport à la mesure* m, *c'est-à-dire que si* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *est tel que* $m(\mathrm{A}) = 0$, *alors* $\mu(\mathrm{A}) = 0$.

DÉMONSTRATION – Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$. On a alors $f 1_A = 0$ m-p.p. et donc $\mu(A) = \int f 1_A dm = 0$ d'après le lemme 4.12. ∎

On déduit de cette proposition que la mesure de Dirac en 0, définie en (2.2), n'est pas une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (on peut montrer que ces deux mesures sont étrangères (voir définition 2.29 et proposition 2.30).

Notons que l'on peut aussi définir des mesures signées de densité, voir la définition 6.74.

4.4.2 Exemples de probabilités de densité

Définition 4.23 (Probabilité de densité) *Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) s'il existe $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\int f d\lambda = 1$ et $p(A) = \int f 1_A d\lambda = \int_A f d\lambda$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Les lois de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, données dans la proposition suivante seront souvent utilisées dans le calcul des probabilités. (On rappelle qu'une loi de probabilité est, par définition, une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Définition 4.24 (Quelques lois de densité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) *On donne ici trois exemples de lois de densité.*

1. *Loi uniforme, $\mathcal{U}(a,b)$ Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi de densité $\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}$: $p(A) = \frac{1}{b-a} \int 1_{[a,b]} 1_A d\lambda$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
2. *Loi exponentielle, $\mathcal{E}(\tau)$ Soit $\tau > 0$; la loi exponentielle est définie par la densité f définie par :*
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0, \\ \tau e^{-\tau x} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$
3. *Loi de Gauss, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$; la loi de Gauss de paramètre (μ, σ) est définie par la densité f définie par :*
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Soit $f \in \mathcal{M}$, la proposition 3.23 donne que $|f|$, f^+, $f^- \in \mathcal{M}_+$ et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne

$$\int f^+ dm \leq \int |f| dm \text{ et } \int f^- dm \leq \int |f| dm.$$

Ceci va nous permette de définir l'espace $\mathcal{L}^1$ et l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ à partir de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ (définition 4.8 page 178).

Définition 4.25 (Espace $\mathcal{L}^1$ et intégrale de Lebesgue) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* f *est intégrable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si* $\int |f| dm < +\infty$. *Dans ce cas, on a aussi*

$$\int f^+ dm < +\infty \text{ et } \int f^- dm < +\infty.$$

On pose alors :

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \ \ (\in \mathbb{R}).$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(ou plus simplement* $\mathcal{L}^1$*) l'ensemble des fonctions intégrables.*

Soit $f \in \mathcal{M}$, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int |f| dm = \int f^+ dm + \int f^- dm$. On voit donc que $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$.

Proposition 4.26 (Propriétés de $\mathcal{L}^1$ et de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$)
Soit (E, T, m) *un espace mesuré. On a alors :*

1. $\mathcal{L}^1$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.
2. *L'application* $f \mapsto \int f dm$ *est une application linéaire de* $\mathcal{L}^1$ *dans* $\mathbb{R}$.
3. *Monotonie : soient* f *et* $g \in \mathcal{L}^1$ *telles que* $f \leq g$ *; alors* $\int f dm \leq \int g dm$.
4. *Pour tout* $f \in \mathcal{L}^1$, $|\int f dm| \leq \int |f| dm$.

DÉMONSTRATION –

1. On sait déjà que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (proposition 3.19). Pour montrer que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer, en utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm$ et $\int |f + g| dm \leq \int |f| dm + \int |g| dm$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int \alpha f dm = \alpha \int f dm. \tag{4.8}$$

Cas 1. Si $\alpha = 0$, (4.8) est bien vraie.

Cas 2. Si $\alpha > 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ et $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = \alpha(\int f^+ dm - \int f^- dm) = \alpha \int f dm$.

Cas 3. Si $\alpha < 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ et $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = (-\alpha)(\int f^- dm - \int f^+ dm) = \alpha \int f dm$.

(b) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

On utilise les deux décompositions de $f+g$: $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. On en déduit $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit

$$\int (f+g)^+ dm + \int f^- dm + \int g^- dm = \int (f+g)^- dm + \int f^+ dm + \int g^+ dm.$$

On en déduit (noter que tous les termes de l'égalité précédente sont dans $\mathbb{R}_+$)

$$\int (f+g)^+ dm - \int (f+g)^- dm = \int f^+ dm - \int f^- dm + \int g^+ dm - \int g^- dm,$$

et donc $\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm$.

On a bien montré que l'application $f \mapsto \displaystyle\int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \leq g$. On remarque que $f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$, donc $f^+ + g^- \leq g^+ + f^-$. En utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit que

$$\int f^+ dm + \int g^- dm \leq \int g^+ dm + \int f^- dm$$

et donc que

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \leq \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.$$

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. On a $|\int f dm| = |\int f^+ dm - \int f^- dm| \leq \int f^+ dm + \int f^- dm = \int |f| dm$.

■

On peut définir sur $\mathcal{L}^1$ une semi–norme de la manière suivante :

Définition 4.27 (Semi-norme sur $\mathcal{L}^1$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{L}^1$. *On pose :*

$$\|f\|_1 = \int |f| dm.$$

L'application de $\mathcal{L}^1$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par* $f \mapsto \|f\|_1$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}_1$.

On a bien $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1$. Le fait que $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$ découle alors de la partie 1 de la démonstration de la proposition 4.26, c'est-à-dire du fait que

$$\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm \text{ et } \int |f+g| dm \leq \int |f| dm + \int |g| dm,, \ \forall f, g \in \mathcal{M}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Par contre, $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1$ car $\|f\|_1 = 0$ n'entraîne pas $f = 0$ mais seulement $f = 0$ p.p., comme cela est démontré à la proposition suivante.

Proposition 4.28 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors* $\int f dm = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p..*

2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. *Alors* $\|f\|_1 = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p..*

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f = g$ *p.p.. Alors* $\int f dm = \int g dm$.

DÉMONSTRATION –

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$.

   (a) On suppose que $f = 0$ p.p.. On a alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$. (ceci est donné par le troisième point du lemme 4.12.)

   (b) On suppose que $\int f dm = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le lemme 4.15 page 181 donne $\int f dm \geq \frac{1}{n} m(\{f \geq \frac{1}{n}\})$. On a donc

   $$m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0 \text{ et } m(\{f > 0\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0$$

   (on a utilisé ici la σ-sous additivité de m). Comme $\{f = 0\}^c = \{f > 0\}$, on en déduit $f = 0$ p.p..

2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. La propriété démontrée ci-dessus donne $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $|f| = 0$ p.p., et donc $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On a

   $$|\int f dm - \int g dm| = |\int (f-g) dm| \leq \int |f-g| dm = 0$$

   (on a utilisé le quatrième point de la proposition 4.26 et $|f-g| = 0$ p.p.). Donc, $\int f dm = \int g dm$.

■

La dernière assertion de la proposition précédente nous permettra, dans la prochaine section, de définir l'intégrale sur un espace appelé L^1.

On conclut cette section par une proposition préliminaire au théorème de convergence dominée.

Proposition 4.29 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$, $f \in \mathcal{M}$ *et* $g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$, *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le g$ *p.p.. On a alors* $f \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, *quand* $n \to +\infty$ *et* $\int f_n dm \to \int f dm$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$, Il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$. Puis, comme $|f_n| \le g$ p.p., il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in T$ tel que $m(B_n) = 0$ et $|f_n| \le g$ sur B_n^c. On pose $C = A \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$. Par σ-sous additivité de m, on a aussi $m(C) = 0$. On pose alors $h_n = f_n 1_{C^c}$, $h = f 1_{C^c}$ $G = g 1_{C^c}$, de sorte que $h_n = f_n$ p.p., $h = f$ p.p. et $G = g$ p.p.. De plus les fonctions h_n, h et G sont toujours mesurables et donc $h_n \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{M}$ et $G \in \mathcal{L}^1$.

Comme $|h_n(x)| \le G(x)$ pour tout $x \in E$ (et pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $h_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in E$. On a aussi $|h| \le G$. Ceci montre que $h \in \mathcal{L}^1$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1$.

On pose maintenant $F_n = 2G - |h_n - h|$. Comme $|h_n - h| \le 2G$, on a $F_n \in \mathcal{M}_+$ et on peut donc appliquer le lemme de Fatou (lemme 4.19) à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\liminf_{n\to+\infty} F_n = 2G$, on obtient :

$$\int 2G dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\ge n} \int (2G - |h_n - h|) dm). \quad (4.9)$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ donne $\int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \int |h_n - h| dm$. Donc :

$$\inf_{p\ge n} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \sup_{p\ge n} \int |h_n - h| dm$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |h_n - h| dm.$$

L'inégalité 4.9 devient alors (en remarquant que $\int 2G dm \in \mathbb{R}$) :

$$\limsup_{n\to+\infty} \int |h_n - h| dm \le 0.$$

On a donc $\|h_n - h\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$ et, comme $h_n - h = f_n - f$ p.p., on en déduit $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, et donc $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$ (grâce au quatrième point de la proposition 4.26). ■

4.6 L'espace L^1

Dans toute cette section, on travaille avec un espace mesuré $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.

On définit maintenant une relation d'équivalence, l'égalité presque partout, notée $(= p.p.)$, sur $\mathcal{L}^1$ par :

$$f \ \ (= p.p.) \ \ g \text{ si } f = g \ \ p.p..$$

Définition 4.30 (L'espace L^1) *L'ensemble* $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation* $(= p.p.)$ *définie sur* $\mathcal{L}^1$*, i.e.* $\mathrm{L}^1 = \mathcal{L}^1/(= p.p.)$.

Dans la suite, L^1 désigne $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ et $\mathcal{L}^1$ désigne $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.

Remarque 4.31

1. Un élément de L^1 est donc une partie de $\mathcal{L}^1$.
2. Si $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^1 \,;\, g = f \text{ p.p.}\}$. $\tilde{f}$ est donc un élément de L^1, c'est l'élément de L^1 auquel f appartient (on l'appelle la classe de f).

Définition 4.32 (Structure vectorielle sur L^1) *On munit* L^1 *d'une structure vectorielle (faisant de* L^1 *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*)*

1. *Soient* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*. On choisit* $f \in \mathrm{F}$ *et on pose* $\alpha\mathrm{F} = \{g \in \mathcal{L}^1 \,;\, g = \alpha f \ p.p.\}$.
2. *Soient* $\mathrm{F},\mathrm{G} \in \mathrm{L}^1$*. On choisit* $f \in \mathrm{F}$, $g \in \mathrm{G}$ *et on pose* $\mathrm{F}+\mathrm{G} = \{h \in \mathcal{L}^1 \,;\, h = f + g \ p.p.\}$.

La définition précédente est bien cohérente. En effet $\alpha\mathrm{F}$ (qui est la classe de αf) ne dépend pas du choix de f dans F car $f = f_1$ p.p. implique $\alpha f = \alpha f_1$ p.p.. De même $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ (qui est la classe de $f+g$) ne dépend pas du choix de f dans F et du choix de g dans G car $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p. implique $f+g = f_1+g_1$ p.p..

Définition 4.33 (Intégrale sur L^1) *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *et* $f \in \mathrm{F}$ *(on dit que* f *est un représentant de la classe* F*, noter que* $f \in \mathcal{L}^1$*). On pose :*

$$\int \mathrm{F}\,dm = \int f\,dm.$$

Ici aussi cette définition est bien cohérente car $\int \mathrm{F}dm$ ne dépend pas du choix de f dans F, grâce au troisième point de la proposition 4.28. Le troisième point de la proposition 4.28 nous donne aussi $\|f\|_1 = \|g\|_1$ si $f,g \in \mathcal{L}^1$ et $f = g$ p.p.. Ceci nous permet de définir une norme sur L^1 :

Définition 4.34 (Norme sur L^1) *Soit* $F \in L^1$. *On choisit* $f \in F$ *et on pose* $\|F\|_1 = \|f\|_1$.

Proposition 4.35 *L'application* $F \mapsto \|F\|_1$ *est une norme sur* L^1. *L'espace* L^1 *muni de la norme* $\|\cdot\|_1$ *est donc un espace vectoriel normé.*

DÉMONSTRATION – Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $\mathbb{R}$ (sachant que c'est déjà une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$). Le seul point délicat est de remarquer que $\|F\|_1 = 0$ implique que $F = 0$ (0 est ici l'élément neutre de L^1, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1\,;\ h = 0$ p.p.$\}$). Ceci découle du premier point de la proposition 4.28. ■

Notation : Soit $F \in L^1$ et $A \in T$, on notera $F1_A$ la classe de $f1_A$ si $f \in F$ et on a donc $F1_A \in L^1$. Cette définition est cohérente car la classe de $f1_A$ ne dépend pas du choix de f dans F. On notera alors, comme cela a été fait dans $\mathcal{M}_+$ (voir le lemme 4.12),

$$\int_A F dm = \int F1_A dm.$$

On montrera plus loin que L^1 est complet, c'est donc un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach, voir le théorème 4.48 page 197.

On rappelle que si $f \in \mathcal{L}^1$, $F \in L^1$ et que $f \in F$, on dit que f est un représentant de F. On introduit maintenant plusieurs notions de convergence dans L^1. Il est facile de vérifier que ces définitions sont cohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des représentants choisis pour les éléments de L^1.

La notion de convergence simple n'a pas de sens dans L^1, mais la notion de convergence p.p., vue précédemment, se généralise aux éléments de L^1 ainsi que la notion de convergence en mesure.

Définition 4.36 (Convergence p.p., en mesure et dans L^1) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *p.p. quand* $n \to +\infty$ *si* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$, *avec* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.
2. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *en mesure quand* $n \to +\infty$ *si* $f_n \to f$ *en mesure, quand* $n \to +\infty$, *avec* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.
3. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$ *si* $\|F_n - F\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *(Ici aussi, noter que* $\|F_n - F\|_1 = \|f_n - f\|_1$ *si* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.*)*
4. *Soient* $F, G \in L^1$. *On dit que* $F \geq G$ *p.p. si* $f \geq g$ *p.p. avec* $f \in F$ *et* $g \in G$.

On peut démontrer (s'inspirer de la démonstration du théorème 4.49 et voir les exercices du chapitre 3) que si une suite de fonctions de L^1 converge en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout. Dans le cas où la mesure m est finie, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Remarque 4.37 Soit (E,T,m) un espace mesuré. Soient $F,G \in L^1$. $F = G$ est donc équivalent à $f = g$ p.p. si $f \in F$ et $g \in G$. En général, on écrira plutôt $F = G$ p.p. au lieu de $F = G$ (voir la remarque 4.40).

Remarque 4.38 Soit (E,T,m) un espace mesuré. Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ (ou $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$). On utilisera souvent la notation (légèrement incorrecte), "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$". Cette notation signifie "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" en choisissant $f_n \in F_n$. Ceci est cohérent car le fait que "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" ne dépend pas du choix de f_n dans F_n (voir aussi la remarque 4.40).

En fait, on écrira même souvent "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" (pour une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\subset L^1$) sans préciser les espaces de départ et d'arrivée pour f. A vrai dire, en choisissant $f_n \in F_n$, f est au moins définie p.p. sur E et le changement du choix de f_n dans F_n ne change f que sur un ensemble de mesure nulle. D'autre part, en l'absence de précision, f sera supposée être à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.39 (Propriétés de l'intégrale sur L^1) *Soit (E,T,m) un espace mesuré. On a alors :*

1. *Soit $F \in L^1$. Alors $|\int F dm| \le \|F\|_1$.*
2. *<u>Linéarité</u> : $F \mapsto \int F dm$ est une application linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$.*
3. *<u>Monotonie</u> : Soient $F,G \in L^1$ t.q. $F \ge G$ p.p., alors $\int F dm \ge \int G dm$.*

DÉMONSTRATION – 1. Soit $F \in L^1$ et $f \in F$, on a $|\int F dm| = |\int f dm| \le \|f\|_1 = \|F\|_1$.

2. La linéarité de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.26). La continuité est donné par le premier point ci-dessus.
3. La monotonie de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.26).

■

Remarque 4.40 soit (E,T,m) un espace mesuré.

1. On confondra dans la suite un élément F de L^1 avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \in F$.
2. De manière plus générale, soit $A \subset E$ tel que A^c soit négligeable (c'est-à-dire $A^c \subset B$ avec $B \in T$ et $m(B) = 0$) et soit $f : A \to \mathbb{R}$ (la fonction f est donc définie

p.p.). On dira que f est un élément de L^1 s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^1 ; h = g \text{ p.p.}\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^1 ; h = f \text{ p.p.}\}$. En confondant ainsi f et $\tilde{g}$ on a donc $\int f dm = \int g dm$. Noter également que f est m-mesurable (voir la définition 4.13 page 180).

3. Avec la confusion décrite ci-dessus, si f et g sont des éléments de L^1, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Remarque 4.41 Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(E, \overline{T}, \overline{m})$ son complété (cf définition 2.26 et exercice 2.26). L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est "identique" à l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, il existe une bijection évidente entre ces deux espaces en remarquant que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. (voir à ce propos l'exercice 4.11).

Pour montrer qu'une fonction est dans L^1 on utilise souvent le lemme de Fatou de la manière suivante (c'est en fait une conséquence facile du lemme de Fatou pour les fonctions mesurables positives, cf lemme 4.19) :

Lemme 4.42 (Utilisation de Fatou) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *On suppose que :*

1. $f_n \geq 0$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

2. $\exists C$, $\int f_n dm \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

3. $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to \infty$,

alors $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\int |f| dm \leq C$.

On peut également montrer qu'une fonction est dans L^1 en utilisant le théorème de convergence monotone. Ceci est précisé dans le théorème 4.43 (dit théorème de Beppo-Lévi) (qui donne aussi un résultat de convergence dans L^1).

4.7 Théorèmes de convergence dans L^1

Nous connaissons à présent trois notions de convergence pour les fonctions de L^1, les notions de convergence presque partout, convergence en mesure et la notion de convergence habituelle dans un espace normé, c'est-à-dire ici la convergence pour la norme L^1. On peut montrer par des contre-exemples que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, et que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout. Pour montrer que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, on peut considérer l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^1(\mathbb{R})$ définie par : $f_n(x) = n 1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a évidemment $f_n \to 0 \;\; pp$, alors que $\|f_n\|_1 = 1$. Pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout, on considère à nouveau l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et on construit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^1(\mathbb{R})$ (dite "bosse glissante", voir figure 4.7) définie par : $f_{n+k}(x) = 1_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, pour $n = \frac{p(p-1)}{2}$, $p \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$. On peut voir facilement

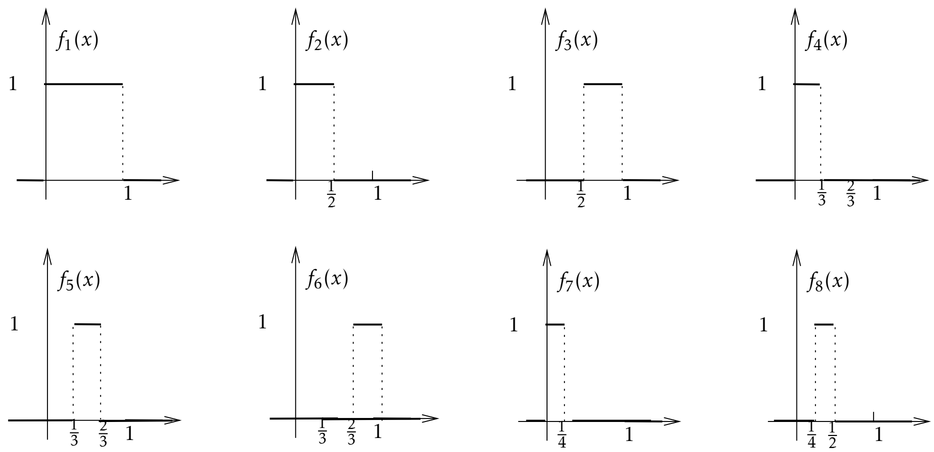

FIGURE 4.1 – La bosse glissante

que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{p}$ pour $n \in [\frac{p(p-1)}{2}, \frac{p(p+1)}{2}[$, alors que $f_n \not\to 0 \quad pp$ (par contre, on peut noter qu'il est possible d'extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge presque partout vers 0). Le théorème de convergence dominée, énoncé ci-après, donne une hypothèse suffisante pour qu'une suite (de fonctions) convergeant presque partout converge aussi dans L^1.

On rappelle (voir la remarque 4.38) que l'hypothèse "$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $F_n \to f$ p.p." signifie simplement que $f_n \to f$ p.p. en choisissant $f_n \in F_n$. Cette définition est bien cohérente car elle ne dépend pas du choix des f_n dans F_n. On rappelle aussi que $f_n \to f$ p.p. signifie qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in A^c$.

4.7.1 Convergence presque partout et convergence dans L^1

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de convergence monotone et permet de montrer la convergence dans L^1 d'une suite monotone de fonctions convergeant presque partout.

Théorème 4.43 (Beppo–Lévi) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *On suppose que :*

1. $f_{n+1} \geq f_n$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *[ou* $f_{n+1} \leq f_n$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$*],*

2. $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$.

On a alors :

1. $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) si et seulement si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}.$$

2. Si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*, alors* $f_n \to f$ *dans* L^1.

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.32.

Nous allons maintenant voir un résultat fondamental, conséquence du lemme de Fatou, qui permet de prouver la convergence de suites dans L^1 sans hypothèse de convergence monotone.

Théorème 4.44 (Convergence dominée) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. L'espace* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est noté* L^1 *. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* f *une fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

1. $f_n \to f$ *p.p.*

2. $\exists F \in L^1$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq F$ *p.p..*

Alors $f \in L^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $f_n \to f$ *dans* L^1*, c'est-à-dire*

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci donne aussi $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$*, lorsque* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Ce théorème est essentiellement donné par la proposition 4.29. La différence avec la proposition 4.29 tient dans le fait que f_n et F sont dans L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$ et que f n'est pas nécessairement mesurable. Il s'agit toutefois de différences mineures comme nous le voyons ci après.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. La première hypothèse du théorème signifie que $f_n \to f$ p.p. (voir la remarque 4.38). Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in A^c$. On remplace alors f_n par $f_n 1_{A^c}$, encore noté f_n (c'est toujours un représentant de la même classe d'équivalence car $m(A) = 0$). On définit aussi g par $g = f$ sur A^c et $g = 0$ sur A. Enfin, on choisit un représentant de F, encore noté F. On obtient ainsi :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$,

2. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, quand $n \to +\infty$,
3. $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^1$ et $f_n \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les 2 premiers items donnent aussi $g \in \mathcal{M}$ (par la proposition 3.19, on utilise ici le fait que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et pas seulement pour presque tout x). On peut donc appliquer la proposition 4.29 page 189. Elle donne : $g \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$ et $\int f_n dm \to \int g dm$, quand $n \to +\infty$.

Comme $g = f$ p.p., on a donc $f \in \mathrm{L}^1$ (au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p.). Puis $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, et $\int f_n dm \to \int g dm = \int f dm$, quand $n \to +\infty$. ■

Dans le théorème 4.44, l'hypothèse de convergence p.p. de f_n vers f peut être remplacée par une hypothèse de convergence en mesure (plus précisément, avec l'hypothèse de domination donnée dans le théorème 4.44, on a même équivalence entre la convergence en mesure et la convergence dans L^1). On obtient ainsi le théorème suivant (ou seule la partie utile de cette équivalence est donnée).

Théorème 4.45 (Convergence en mesure dominée) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est noté* L^1 *. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* f *une fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

1. $f_n \to f$ *en mesure.*
2. $\exists \mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le \mathrm{F}$ *p.p..*

Alors $f \in \mathrm{L}^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $f_n \to f$ *dans* L^1, *c'est-à-dire*

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci donne aussi $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$, *lorsque* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – En choisissant des représentants de f_n et f, la démonstration de ce théorème se ramène à celle de l'exercice 4.36. ■

4.7.2 Série absolument convergente

On va maintenant montrer que l'espace $(\mathrm{L}^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, en montrant que toute série absolument convergente dans L^1 (*i.e.* t.q. la série des normes converge) est convergente dans L^1. On en déduira aussi un résultat très important (le théorème 4.49) qui permet d'extraire d'une suite convergeant dans L^1 une sous-suite convergeant presque partout. On aura besoin au cours de la démonstration du petit résultat (démontré dans l'exercice 4.11) suivant :

Lemme 4.46 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $F \in \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $\int F dm < +\infty$. *Alors* $F < +\infty$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et* $F(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in A^c$*).*

Théorème 4.47 (Séries absolument convergentes dans L^1**)** *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *t.q.* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty$ *; alors :*

1. $\exists F \in L^1$ *;* $|\sum_{p=0}^{n} f_p| \leq F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. La série de terme général $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in E$*, convergente (dans* $\mathbb{R}$*). On définit* f *par* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *(de sorte que* f *est définie p.p.).*

3. $f \in L^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\sum_{p=0}^{n} f_p \to f$ *dans* L^1 *et p.p., quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – La preuve s'effectue en trois étapes :

1. On choisit un représentant de f_n, encore noté f_n, et on pose $F(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}} |f_p(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a donc $F \in \mathcal{M}_+$ et le corollaire 4.18 du théorème de convergence monotone donne
$$\int F dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty.$$
Le lemme 4.46 donne alors $F < +\infty$ p.p., c'est-à-dire il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $F(x) < +\infty$ pour tout $x \in A^c$. En remplaçant F par 0 sur A, on a donc $F \in \mathcal{L}^1$. (Donc, $F \in L^1$ au sens de la remarque 4.40).
La définition de F donne immédiatement $|\sum_{p=0}^{n} f_p| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Comme $m(A) = 0$, f est donc définie p.p. car elle est définie pour $x \in A^c$ par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} f_p(x)$.
3. On pose $s_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$. le premier point donne $|s_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $F \in L^1$. Le deuxième point donne $s_n \to f$ p.p.. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44). Il donne $f \in L^1$ et la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vers f) dans L^1. La convergence p.p. (vers f) de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par le deuxième point. ■

Théorème 4.48 (Riesz–Fisher) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. L'espace* $L^1(E, T, m)$ *est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que L^1 est espace vectoriel normé. Une conséquence du théorème 4.47 est que, dans L^1, toute série absolument convergente est convergente. Cette propriété est une caractérisation du fait qu'un espace vectoriel normé est complet. On en déduit donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est complet et donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach. ∎

Dans la suite L^1 sera toujours muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Théorème 4.49 (Réciproque partielle du théorème de convergence dominée)

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$ telles que $f_n \to f$ dans L^1, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et $F \in L^1$ telles que :

1. $f_{n_k} \to f$ p.p.,

2. $|f_{n_k}| \le F$ p.p., pour tout $k \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – En utilisant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^1, on construit par récurrence une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $n_{k+1} > n_k$ et si $p, q \ge n_k$, $\|f_p - f_q\|_1 \le \frac{1}{2^k}$. On peut alors appliquer le théorème 4.47 à la série de terme général $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ pour conclure. ∎

On donne maintenant le théorème de Vitali, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de convergence dans L^1 pour une suite convergeant p.p.. La démonstration de ce théorème ainsi que des petits résultats préliminaires qu'elle nécessite font l'objet des exercices 4.33 et 4.34.

Proposition 4.50 *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$; alors :*

1. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon$.

2. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$.

Théorème 4.51 (Vitali) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de L^1 t.q. $f_n \to f$ p.p., f prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ (voir remarque 4.38). Alors, $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. (Équi-intégrabilité) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in T, n \in \mathbb{N}, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon,$$

2. (Tension) pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $C \in T$ *t.q.* $m(C) < +\infty$ *et*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.34 ; la démonstration du fait que les hypothèses 1 et 2 impliquent la convergence dans L^1 ne nécessite pas le théorème de convergence dominée : on utilise le théorème d'Egorov (cf théorème 3.39 et exercice 3.28). Le théorème de convergence dominée peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali (cf exercice 4.34). ■

Dans le théorème 4.51, si $m(E) < +\infty$, l'hypothèse 2 est, bien sûr, toujours vérifiée (il suffit de prendre $C = E$).

4.8 Continuité et dérivabilité sous le signe d'intégration

Soient (E, T, m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on définit l'application $f(., t) : E \to \mathbb{R}$, qui à x associe $f(x, t)$. On suppose que l'application $f(., t)$ ainsi définie vérifie l'hypothèse suivante :

$$f(., t) \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.10}$$

et on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int f(., t) dm = \int f(x, t) dm(x).$$

Théorème 4.52 (Continuité sous $\int$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* f *une fonction de* $E \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant l'hypothèse (4.10) et* $t_0 \in \mathbb{R}$ *; on suppose de plus que :*

1. *l'application* $f(x, .)$*, définie pour presque tout* $x \in E$ *par :* $t \mapsto f(x, t)$*, est continue en* t_0*, pour presque tout* $x \in E$ *;*
2. $\exists\ \varepsilon > 0$ *et* $\exists\ G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *tels que* $|f(., t)| \leq G$ *p.p., pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.

Alors F*, définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $F(t) = \int f(., t) dm = \int f(x, t) dm(x)$*, est continue en* t_0.

DÉMONSTRATION – Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$. Soit f_n définie par $f_n(x) = f(x, t_n)$. Comme $f_n \to f(\cdot, t_0)$ p.p. et $|f_n| \leq G$ p.p.. On peut appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44) à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne $F(t_n) \to F(t_0)$ quand $n \to +\infty$. ■

Théorème 4.53 (Dérivabilité sous $\int$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* f *une fonction de* $E \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant l'hypothèse (4.10) et* $t_0 \in \mathbb{R}$*. On suppose de plus qu'il existe* $\varepsilon > 0$*,* $A \in T$ *et* $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et :*

1. L'application $t \mapsto f(x,t)$ *est dérivable pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ *et pour tout* $x \in A^c$ *;*

2. $|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq G(x)$ *pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ *et pour tout* $x \in A^c$*.*

Alors F*, définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $F(t) = \displaystyle\int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x)$*, est dérivable en* t_0 *et :*

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)dm(x).$$

DÉMONSTRATION – Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans L^1 et on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44) car $f_n \to \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$ p.p., quand $n \to +\infty$, et, si $x \in A^c$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n} \in]0,1[$ t.q. $f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta_{x,n}t_0 + (1-\theta_{x,n})t_n)$ (grâce au théorème des accroissements finis) et donc $|f_n| \leq G$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème 4.44 donne alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0) \in L^1$ et $\int f_n dm \to \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)dm$. Ceci étant vrai pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)dm(x).$$

. ■

4.9 Espérance et moments des variables aléatoires

Définition 4.54 (Espérance, moment, variance) *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire réelle.*

.

1. *Si* $X \geq 0$ *(c'est-à-dire* $X(\omega) \geq 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$*), on définit l'espérance* $E(X)$ *de la variable aléatoire* X *par* $E(X) = \int X(\omega) dp(\omega)$.
2. *Si* $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *(c'est-à-dire* $E(|X|) < +\infty$*), on définit l'espérance* $E(X)$ *de la variable aléatoire* X *par :*

$$E(X) = \int X(\omega) dp(\omega).$$

   On définit la variance de X *par Var*$(X) = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$ *(avec* $\sigma(X) \geq 0$*).*
3. *Pour* $r \in [1, +\infty[$*, le moment d'ordre* r *de la variable aléatoire* X *est l'espérance de la variable aléatoire* $|X|^r$.

Définition 4.55 (Covariance) *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux v.a.r. t.q.* $E(X^2) < +\infty$ *et* $E(Y^2) < +\infty$*. On définit la covariance de* X *et* Y *par : cov(*X, Y*)* $= E((X - E(X)(Y - E(Y))$*. (Remarquer que* $(X - E(X)(Y - E(Y))$ *est une v.a.r. intégrable car sa valeur absolue est majorée, par exemple, par* $X^2 + Y^2 + E(X)^2 + E(Y)^2$ *qui est intégrable.)*

On calcule rarement l'espérance d'une v.a. comme intégrale par rapport à la probabilité p ; en effet, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est souvent mal connu. Le théorème 4.58 montre qu'il suffit en fait de connaître la loi de la v.a. X pour calculer son espérance (ou, plus généralement, l'espérance d'une fonction de X). On se ramène ainsi au calcul d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.

Les deux inégalités suivantes découlent immédiatement du lemme 4.15 :

Lemme 4.56 (Inégalité de Markov) *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle positive sur* Ω *et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*. On suppose que* $0 < E(X) < +\infty$*. Alors :*

$$p(\{X \geq \lambda E(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

DÉMONSTRATION – Il suffit, par exemple, d'appliquer le lemme 4.15 avec $f = X$ et $t = \lambda E(X)$. ■

Lemme 4.57 (Inégalité de Bienaymé Tchebychev) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* Ω*, intégrable et t.q. sa variance vérifie* $0 <$

$\sigma^2(X) < +\infty$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors :*

$$P(\{|X - E(X)| \geq \lambda\sigma(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

DÉMONSTRATION – Appliquer le lemme 4.15 avec $f = |X - E(X)|^2$ et $t = \lambda\sigma(X)$. ■

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω. La loi de X, notée P_X est définie par $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est équivalent à dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a, avec $\varphi = 1_A$:

$$\int_\Omega \varphi \circ X(\omega) dP(\omega) = \int_\mathbb{R} \varphi(x) dP_X(x). \tag{4.11}$$

On rappelle que $\varphi \circ X$ est souvent improprement noté $\varphi(X)$, ce qui s'explique par le fait $\varphi \circ X(\omega) = \varphi(X(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le théorème 4.58 montre que cette égalité est vraie pour une large classe de fonctions boréliennes φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ (on rappelle que borélienne signifie mesurable quand les espaces sont munis de la tribu de Borel).

Théorème 4.58 (Loi image) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* Ω *et* P_X *la loi de la variable aléatoire* X. *On a alors :*

1. *L'égalité (4.11) est vraie pour toute fonction* φ *borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et toute fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. *Soit* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *la fonction* $\varphi \circ X$ *appartient à* $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *si et seulement si* $\varphi \in L^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$. *De plus, si* $\varphi \in L^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$, *L'égalité (4.11) est vraie.*

DÉMONSTRATION – On remarque que (4.11) est vraie pour tout $\varphi = 1_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (par définition de p_X). Par linéarité positive, (4.11) est encore vraie pour tout φ borélienne étagée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par convergence monotone, (4.11) est alors vraie pour tout φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci donne la première partie du premier item. En utilisant la décomposition $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, on montre alors le deuxième item. Enfin, la deuxième partie du premier item vient du fait que φ est intégrable pour la probabilité p_X si φ est borélienne bornée. ■

Un produit de v.a.r. intégrables et indépendantes est une v.a.r. intégrable (ce qui est, bien sûr, faux sans l'hypothèse d'indépendance) et l'espérance de ce produit est égal au produit des espérances. Ce résultat plus général est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 4.59 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $X_1, \ldots, X_d$ *des v.a.r. indépendantes.*

1. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. On a alors :*

$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)). \tag{4.12}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

2. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* $\varphi_i(X_i)$ *est intégrable pour tout* $i = 1, \ldots, d$*. La v.a.r.* $\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)$ *est intégrable et l'égalité (4.12) est vraie.*

3. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. L'égalité (4.12) est vraie.*

N.B. Si $X_1, \ldots, X_d$ *sont des v.a.r., le fait que (4.12) soit vraie pour toute famille* $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *de fonctions boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est donc une condition nécessaire et suffisante pour les v.a.r.* $X_1, \ldots, X_d$ *soient indépendantes.*

DÉMONSTRATION – Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sont des fonctions caractéristiques de boréliens de $\mathbb{R}$, l'égalité (4.12) est une conséquence immédiate de la définition de l'indépendance des X_i (Si $\varphi_i = 1_{A_i}$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $E(\varphi_i(X_i)) = P(\{X_i \in A_i\}) = P(X_i^{-1}(A_i))$). Par linéarité positive, on en déduit que (4.12) est vraie si les fonctions φ_i sont (boréliennes) étagées positives (c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{E}_+$). Puis, par convergence monotone, on en déduit le premier item de la proposition (car toute fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_+$).

Pour le deuxième item, on utilise (4.12) avec la fonction $x \mapsto |\varphi_i(x)|$ au lieu de la fonction φ_i (pour tout i). On montre ainsi que la v.a.r. $\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)$ est intégrable. Puis, on montre (4.12) par linéarité (utilisant $\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$).

Le troisième item est conséquence immédiate du deuxième (car si X est une v.a.r. et φ est une fonction borélienne bornée, la v.a.r. $\varphi(X)$ est intégrable). ■

Une conséquence de la proposition 4.59 est que XY est intégrable et $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes et intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

Pour montrer que des v.a.r. sont indépendantes, il est parfois utile de savoir qu'il suffit de montrer (4.12) lorsque les fonctions φ_i sont continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est l'objet de la proposition 4.61 qui se démontre à partir d'un résultat d'unicité (proposition 4.60) sur lequel nous reviendrons au chapitre 5. On note $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est à support compact s'il existe un compact K de $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi = 0$ sur K^c) .

Proposition 4.60 *Soit m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

$$\int \varphi dm = \int \varphi d\mu \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Alors, $m = \mu$.

DÉMONSTRATION – Puisque m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts, on a bien $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ et $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu)$. On pose maintenant $\mathcal{C} = \{]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et on commence par montrer que $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$.

Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \uparrow 1_{]a,b[}$. En effet, il suffit de construire φ_n, pour $n \geq 2/(b-a)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \leq a,\\
&\varphi_n(x) = n(x-a) \text{ si } a < x < a + \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(x) = 1 \text{ si } a + \tfrac{1}{n} < x < b - \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(x) = -n(x-b) \text{ si } b - \tfrac{1}{n} \leq x \leq b\\
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } b \leq x.
\end{aligned}$$

Puis, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$, on obtient (par convergence monotone ou par convergence dominée) $m(]a,b[) = \mu(]a,b[)$.

On conclut enfin que $m = \mu$ en utilisant, par exemple, la proposition 2.31. ■

Proposition 4.61 *Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X_1,\ldots,X_d$ des v.a.r. Ces v.a.r. sont indépendantes si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$,*

$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)), \tag{4.13}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

DÉMONSTRATION – Le fait que la condition est nécessaire est une conséquence immédiate de la proposition 4.59 car une fonction continue à support compact est borélienne et bornée.

On montre maintenant que la condition est suffisante. On suppose donc que (4.13) est vraie pour toute famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on veut montrer que les v.a.r. $X_1,\ldots,X_d$ sont indépendantes, c'est-à-dire que pour tout $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$E\left(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i}(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} E(1_{A_i}(X_i)). \tag{4.14}$$

On rappelle en effet que

$$E(1_{A_i}(X_i)) = P(X_i^{-1}(A_i)) \text{ et } E(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i} X_i)) = P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i)).$$

Pour montrer (4.14), on introduit, pour tout $1 \le n \le d+1$, la propriété suivante :
P_n : (4.13) est vraie si $\varphi_i = 1_{A_i}$, avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pour $i < n$, et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i \ge n$, $\varphi_i \ge 0$.

L'hypothèse de la proposition donne que P_1 est vraie. On suppose maintenant que P_n est vraie pour un $n \in \{1,\ldots,d\}$. Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour $i < n$ (et $\varphi_i = 1_{A_i}$) et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i > n$. Pour $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose, avec $\varphi_n = 1_{A_n}$:

$$m(A_n) = E(\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)),$$
$$\mu(A_n) = \prod_{i=1}^d E(\varphi_i(X_i)).$$

Les applications m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La propriété P_n montre que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La proposition 4.60 montre alors que $m = \mu$ ce qui donne la propriété P_{n+1}. Par récurrence sur n, on montre ainsi que P_{d+1} est vraie, ce qui donne (4.14) et l'indépendance de $X_1,\ldots,X_d$. ■

4.10 Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$

Définition 4.62 *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* $N > 1$ *(*$N \in \mathbb{N}$*).*

1. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}^N$. *Pour* $x \in E$, *on pose* $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_N(x))^t \in \mathbb{R}^N$. *La fonction* f *appartient à* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ *si* $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *pour tout* $n \in \{1,\ldots,N\}$.
2. *Si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$, *on note*

$$\int f dm = (\int f_1 dm,\ldots,\int f_N dm)^t \in \mathbb{R}^N.$$

La caractérisation suivante de mesurabilité et intégrabilité est intéressante.

Proposition 4.63 *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré,* $N > 1$ *et* $f : E \to \mathbb{R}^N$.

On note $f_1,\ldots,f_N$ *les composantes de* f.

1. f_n *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}$*) pour tout* $n \in \{1,\ldots,N\}$ *si et seulement si* f *est mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}^N$, *c'est-à-dire si et seulement si* $f^{-1}(A) \in E$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.
2. *Si* f *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}^N$*). On munit* $\mathbb{R}^N$ *d'une norme, notée* $\|\cdot\|$. *Alors,* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ *si et seulement si* $\int \|f\| dm < +\infty$ *(noter que* $\|f\| \in \mathcal{M}_+$*).*

DÉMONSTRATION – On donne la démonstration pour $N = 2$.

1. On suppose d'abord $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$. On veut montrer que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par $\{A \times B,\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, il suffit de montrer que $f^{-1}(A \times B) \in T$ pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Soit donc $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B) \in T$ car f_1 et f_2 sont mesurables. Donc $f^{-1}(A \times B) \in T$. On a bien montré que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$

Réciproquement, on suppose maintenant que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque que $f_1^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathbb{R})$. Or $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, donc $f_1^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathbb{R}) \in T$, ce qui prouve que f_1 est mesurable. On prouve de manière semblable que f_2 est mesurable.

2. Soit f mesurable de E dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$. Comme $y \mapsto \|y\|$ est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, l'application $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (comme composée d'applications mesurables). Comme cette application ne prend que des valeurs positives ou nulles, on a donc $\|f\| \in \mathcal{M}_+$.

   Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^N$ sont équivalentes, on a donc $\int \|f\| dm < +\infty$ si et seulement si $\int \|f\|_1 dm < +\infty$, avec $\|f\|_1 = \sum_{n=1}^N |f_n|$. Il est alors immédiat de remarquer que $\int \|f\|_1 dm < +\infty$ si et seulement $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$. On a donc :
$$\int \|f\| dm < +\infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m).$$
■

La définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int \|f\| dm$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer, comme dans le cas $N = 1$, l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.". On rappelle que $f = g$ p.p. s'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c.

Définition 4.64 (Espace L^1) *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *L'espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ est l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".*
2. *On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $F \in L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$. On pose $\|F\|_1 = \int \|f\| dm$, où $f \in F$ (cette définition est correcte car indépendante du choix de f dans F).*

Proposition 4.65 (L^1 est un espace de Banach) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $N > 1$. L'espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ est un espace de Banach (réel) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.64).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition découle facilement du cas $N = 1$. ■

Définition 4.66 *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré.*

1. *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$. *On note* $\mathfrak{Re}(f)$ *et* $\mathfrak{Im}(f)$ *les parties réelle et imaginaire de* f. *On a donc, pour* $x \in \mathrm{E}$, $f(x) = \mathfrak{Re}(f)(x) + i\,\mathfrak{Im}(f)(x)$, *avec* $\mathfrak{Re}(f)(x), \mathfrak{Im}(f)(x) \in \mathbb{R}$. *La fonction* f *appartient à* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *si* $\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.
2. *Si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$, *on note*

$$\int f dm = \int \mathfrak{Re}(f) dm + i \int \mathfrak{Im}(f) dm \in \mathbb{C}.$$

Ici aussi, on a une caractérisation de mesurabilité et intégrabilité.

Proposition 4.67 *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et* f *une application de* $\mathrm{E} \to \mathbb{C}$.

1. $\mathfrak{Re}(f)$ *et* $\mathfrak{Im}(f)$ *sont mesurables (de* E *dans* $\mathbb{R}$*) si et seulement si* f *est mesurable de* E *dans* $\mathbb{C}$, *c'est-à-dire si et seulement* $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{E}$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.
2. *Si* f *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{C}$*),* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *si et seulement si* $\int |f| dm < +\infty$ *(noter que* $|f| \in \mathcal{M}_+$*).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition se ramène facilement à la précédente démonstration (c'est-à-dire à la démonstration de la proposition 4.63) en utilisant l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(z) = (x,y)^t$ si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, qui est une bijection continue, d'inverse continue. ■

Ici aussi, la définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int |f| dm$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".

Définition 4.68 *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré.*

1. *L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *est l'espace* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *quotienté par la relation "*$f = g$ *p.p.".*
2. *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. *On pose* $\|\mathrm{F}\|_1 = \int |f| dm$, *où* $f \in \mathrm{F}$ *(cette définition est correcte car indépendante du choix de* f *dans* F*).*

Proposition 4.69 *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *est un espace de Banach (complexe) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur* $\mathbb{C}$*) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.68).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition découle facilement du fait que $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un espace de Banach (réel). ■

4.11 Exercices

4.11.1 Intégrale des fonctions mesurables positives et espace $\mathcal{L}^1$

Exercice 4.1 (Sup de mesures) Soit (E, T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\}$ pour $A \in T$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to +\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \text{ (dans } \overline{\mathbb{R}}_+\text{) quand } n \to +\infty.$$

. [On pourra utiliser le fait que

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p.]$$

Corrigé – *On remarque tout d'abord que la suite $(\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle admet donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on passe à la limite quand $n \to +\infty$ dans les inégalités*

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

On obtient

$$\sum_{p=0}^{N} a_p \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

On passe maintenant à la limite quand $N \to \infty$ pour obtenir

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

2. Montrer que m est une mesure.

Corrigé – *On remarque tout d'abord que* $m(\emptyset) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\emptyset) = 0$.
Puis, soit $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ *t.q.* $\mathrm{A}_p \cap \mathrm{A}_q = \emptyset$ *si* $p \neq q$. *On pose* $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. *On a*

$$m(\mathrm{A}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} m_n(\mathrm{A}_p).$$

En utilisant la question précédente avec $a_{n,p} = m_n(\mathrm{A}_p)$, *on en déduit* $m(\mathrm{A}) = \sum_{p=0}^{\infty} m(\mathrm{A}_p)$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f\,dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f\,dm_n)$.

Corrigé – *Soit* $\{a_1,\ldots,a_p\} \subset \mathbb{R}_+^*$ *et* $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_p\} \subset \mathrm{T}$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.
On a $\int f\,dm_n = \sum_{i=1}^{p} a_i m_n(\mathrm{A}_i)$, *la suite* $(\int f\,dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante. Puis, en passant à la limite sur n, on obtient :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{i=1}^{p} a_i m_n(\mathrm{A}_i)\Big) &= \sum_{i=1}^{p} a_i \lim_{n\to+\infty}(m_n(\mathrm{A}_i))\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i m(\mathrm{A}_i) = \int f\,dm,\end{aligned}$$

et donc

$$\int f\,dm = \lim_{n\to+\infty}\Big(\int f\,dm_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\int f\,dm_n\Big).$$

4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

(a) Montrer que $(\int f\,dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f\,dm$.

Corrigé – *Soit* $f \in \mathcal{M}_+$. *Soit* $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *t.q.* $f_p \uparrow f$ *quand* $p\to\infty$. *D'après la question précédente, on a (pour tout n et tout p)*

$$\int f_p\,dm_n \le \int f_p\,dm_{n+1} \le \int f_p\,dm.$$

En passant à la limite sur p (avec n fixé) on en déduit que $\int f\,dm_n \le \int f\,dm_{n+1} \le \int f\,dm$. *La suite* $(\int f\,dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante et majorée par* $\int f\,dm$.

(b) Montrer que $\int f\,dm_n \to \int f\,dm$ lorqsue $n\to+\infty$.

Corrigé – *On pose* $\mathrm{A}_f = \{g \in \mathcal{E}_+,\ g \le f\}$. *On sait que*

$$\int f\,dm = \sup_{g\in\mathrm{A}_f} \int g\,dm \text{ et que } \int f\,dm_n = \sup_{g\in\mathrm{A}_f}\int g\,dm_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

La question 2 donne que $[\int g\,dm = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g\,dm_n$ *pour tout* $g \in \mathcal{E}_+$.. *On en déduit*

$$\int f\,dm = \sup_{g\in\mathrm{A}_f}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\int g\,dm_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{g\in\mathrm{A}_f}\int g\,dm_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int f\,dm_n,$$

ce qui, avec la question précédente, donne bien $\int f\,dm_n \to \int f\,dm$ *quand* $n\to+\infty$.

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to +\infty$.

   Corrigé – *On a $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. la question 4 donne $\int |f| dm_n \le \int |f| dm$, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La question 4 donne aussi que*
   $$\int f^+ dm_n \to \int f^+ dm \text{ et } \int f^- dm_n \to \int f^- dm.$$
   Les deux convergences ayant lieu dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.2 (Somme de mesures) Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E,T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

   Corrigé – *(a) $m(\emptyset) = m_1(\emptyset) + m_2(\emptyset) = 0$,*

   (b) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ t.q. $\mathrm{A}_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a :
   $$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = m_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) + m_2(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n).$$
   Comme $m_i(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^n m_i(\mathrm{A}_p)$ pour $i = 1, 2$, on en déduit
   $$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^n (m_1(\mathrm{A}_p) + m_2(\mathrm{A}_p)) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^n m(\mathrm{A}_p),$$
   ce qui prouve bien la σ-additivité de m.

   Ceci montre bien que m est une mesure.

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

   Corrigé – *Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on pose $\varphi = 1_{\mathrm{A}}$. La définition de m donne immédiatement*
   $$\int \varphi dm = \int \varphi dm_1 + \int \varphi dm_2. \tag{4.15}$$
   Par linéarité de l'intégrale, l'égalité (4.15) est aussi vraie pour $\varphi \in \mathcal{E}_+$.

   Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $\varphi_n \uparrow \varphi$ quand $n \to +\infty$. On écrit (4.15) avec φ_n au lieu de φ et on fait tendre n vers l'infini. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors (4.15).

   On a donc montré que (4.15) est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $f \in \mathcal{M}$, en écrivant (4.15) avec $\varphi = |f|$ on obtient bien que $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{T},m_1) \cap \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{T},m_2)$.

   Enfin, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on écrit (4.15) avec $\varphi = f^+$ et $\varphi = f^-$, la différence donne bien $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E,T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que $\int f\,dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f\,dm_n$.

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $\tilde{m}_n$ par $\tilde{m}_n(A) = \alpha_n m_n(A)$ pour tout $A \in T$. Il est facile de voir que $\tilde{m}_n$ est une mesure sur T, que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n)$ et que $\int f\,d\tilde{m}_n = \alpha_n \int f\,dm_n$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$.*

   On pose maintenant, par récurrence sur n, $\mu_0 = \tilde{m}_0$ et $\mu_n = \mu_{n-1} + \tilde{m}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La question précédente montre, par récurrence sur n, que μ_n est une mesure sur T et donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu_n)$ si et seulement si $f \in \bigcap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n) = \bigcap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,$ $T,\ m_n)$. Enfin, la question précédente donne aussi, toujours par récurrence sur n,

$$\int f\,d\mu_n = \sum_{p=0}^{n} \int f\,d\tilde{m}_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha_n \int f\,dm_n.$$

   Pour tout $A \in T$, on a $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$. On peut donc utiliser les résultats de l'exercice précédent. On obtient que m est une mesure sur T et que $f \in \mathcal{L}^1_{R}(E,T,m)$ implique $f \in \mathcal{L}^1_{R}(E,T,\mu_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f\,dm = \lim_{n\to+\infty} \int f\,d\mu_n$. Si $f \in \mathcal{L}^1_{R}(E,T,m)$ on a donc $f \in \mathcal{L}^1_{R}(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f\,dm = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \int f\,dm_p$, c'est-à-dire

$$\int f\,dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f\,dm_n.$$

Exercice 4.3 (Intégrale pour la mesure de Dirac) Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.20.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f\,d\delta_0$.

Corrigé – *On définit g de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par*

$$g(x) = 0 \text{ si } x \neq 0,$$
$$g(0) = f(0).$$

On a $g \in \mathcal{M}_+$ et, comme $\delta_0(\{0\}^c) = 0$, on a $f = g$ p.p., on en déduit

$$\int f\,d\delta_0 = \int g\,d\delta_0 = f(0)\delta_0(\{0\}) = f(0).$$

Exercice 4.4 (Restrictions de la mesure de Lebesgue) Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B,\mathcal{B}(B),\lambda_B)$. Montrer que $f_{|A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A,\mathcal{B}(A),\lambda_A)$ et que $\int f_{|A}\,d\lambda_A = \int f 1_A\,d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

Corrigé – *On rappelle que $\mathcal{B}(A) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, C \subset A\}$ et $\mathcal{B}(B) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, C \subset B\}$ (voir l'exercice 2.3).*

1. *Soit* $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$. *Il existe donc* $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+$ *et* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p \in \mathcal{B}(\mathrm{B}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

   La fonction $f 1_\mathrm{A}$ *appartient donc aussi à* $\mathcal{E}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$ *(car* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{B})$*) et elle s'écrit*
   $$f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i} 1_\mathrm{A} = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}},$$
   de sorte que
   $$\int f 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}).$$
   La fonction $f_{|\mathrm{A}}$ *(c'est-à-dire la restriction de* f *à* A*) est définie sur* A*, elle s'écrit* $f_{|\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}}$. *Cette fonction appartient à* $\mathcal{E}_+(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$ *car* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{A})$ *pour tout* i *et on a*
   $$\int f_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}).$$
   On a bien montré que
   $$\int f 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A}, \tag{4.16}$$
   pour tout $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$.

2. *Soit* $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$. *il existe* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$ *t.q.* $f_n \uparrow f$, *quand* $n \to +\infty$. *On a donc aussi* $(f_n 1_\mathrm{A})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f 1_\mathrm{A}$ *et* $(f_{n|_\mathrm{A}})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f_{|\mathrm{A}}$, *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $f_{n|_\mathrm{A}} \in \mathcal{E}_+(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$*, la caractérisation de la mesurabilité positive (proposition 3.17) donne* $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$. *On a aussi* $f 1_\mathrm{A} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$. *Puis, en écrivant (4.16) avec* f_n *au lieu de* f *et en passant à la limite quand* $n \to +\infty$*, la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$ *et sur* $\mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$ *donne (4.16).*

   On a donc montré (4.16) pour tout $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$.

3. *Soit* $f \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}), \lambda_\mathrm{B})$. *On remarque d'abord que* $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{M}(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$. *En effet, si* $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a* $(f_{|\mathrm{A}})^{-1}(\mathrm{C}) = f^{-1}(\mathrm{C}) \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{A})$. *Puis, on applique (4.16) à* $|f|$*, qui appartient à* $\mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$*, pour obtenir*
   $$\int |f_{|\mathrm{A}}| d\lambda_\mathrm{A} = \int |f|_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int |f| 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} < \int |f| d\lambda_\mathrm{B} < \infty,$$
   ce qui montre que $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A})), \lambda_\mathrm{A})$.

   Enfin, en appliquant (4.16) avec f^+ *et* f^- *au lieu de* f*, on obtient*
   $$\int f^+ 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f^+{}_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int (f_{|\mathrm{A}})^+ d\lambda_\mathrm{A} < \infty$$
   et
   $$\int f^- 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f^-{}_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int (f_{|\mathrm{A}})^- d\lambda_\mathrm{A} < \infty,$$
   ce qui donne, en faisant la différence,

$$\int f 1_A d\lambda_B = \int f_{|A} d\lambda_A.$$

Exercice 4.5 (Intégrale des fonctions continues) Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ et que

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$$

(cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure de Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

N.B. : Bien sûr, un résultat analogue est vrai en remplaçant $[0,1]$ par $[a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Corrigé – *Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$, une famille $(\alpha_i)_{i\in\{0,\ldots,p\}}$, avec : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, pour tout $i \in \{0,\ldots,p-1\}$, $\alpha_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que :*

$$g(x) = a_i, \ \ \forall x \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[, \ \ \forall i \in \{0,\ldots,p-1\}.$$

On sait que

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

D'autre part, cette fonction g est mesurable (c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$) car, pour tout $C \subset \mathbb{R}$, $g^{-1}(C)$ est une réunion (finie) d'intervalles du type $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ à laquelle on ajoute éventuellement certains des points α_i. On a donc $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}([0,1])$. On a bien montré que $g \in \mathcal{M}([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$. Enfin, comme les singletons sont de mesure nulle, on a $|g| = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| 1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ p.p., et donc

$$\int |g| d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i|(\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \infty.$$

Donc, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$. Finalement, puisque $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ p.p., on a aussi

$$\int g d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

On a donc montré que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \int_0^1 g(x)dx. \tag{4.17}$$

Soit maintenant $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. *On remarque tout d'abord que* f *est mesurable (parce que, par exemple, les ouverts de* $\mathbb{R}$ *engendrent* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et l'image réciproque, par* f, *d'un ouvert de* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $[0,1]$, *donc un élément de* $\mathcal{B}([0,1])$*). Puis, on remarque que* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1],\lambda)$ *car* $\int |f| d\lambda \leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)| < +\infty$.

On compare maintenant $\int f d\lambda$ *et* $\int_0^1 f(x)dx$.

Il existe une suite de fonctions en escalier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *t.q.* $f_n \to f$ *uniformément sur* $[0,1]$, *c'est-à-dire* $\|f_n - f\|_u \to 0$, *quand* $n \to +\infty$.

La définition de l'intégrale des fonctions continues donne $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$ *quand* $n \to +\infty$.

D'autre part, on a aussi $\int f_n d\lambda \to \int f d\lambda$, *quand* $n \to +\infty$, *car* $|\int f_n d\lambda - \int f d\lambda| \leq \int |f_n - f| d\lambda \leq \|f_n - f\|_u \to 0$, *quand* $n \to +\infty$. *En passant à la limite quand* $n \to +\infty$ *dans (4.17) avec* f_n *au lieu de* g, *on obtient bien*

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx.$$

Exercice 4.6 (Fonctions continues et fonctions intégrables) Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $C([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Corrigé – *Soit* $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. *On montre tout d'abord que* f *est mesurable.*

Soit O *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Comme* f *est continue, l'ensemble* $f^{-1}(O) = \{x \in [0,1],\ f(x) \in O\}$ *est une ouvert de* $[0,1]$ *et donc* $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}([0,1])$. *Les ouverts de* $\mathbb{R}$ *engendrant la tribu borélienne de* $\mathbb{R}$, *on en déduit que* f *est mesurable de* $[0,1]$ *(muni de sa tribu borélienne) dans* $\mathbb{R}$ *(muni de sa tribu borélienne).*

On montre maintenant que f *est intégrable. Comme la fonction* f *est continue sur le compact* $[0,1]$, *elle est bornée. Il existe donc* $M \in \mathbb{R}_+$ *t.q.* $|f| \leq M$ *sur* $[0,1]$. *On a donc, par monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$ *:*

$$\int |f| dm \leq M m([0,1]) < \infty.$$

On a donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Exercice 4.7 (Intégrale d'une fonction continue non bornée) Soit $f \in C(]0,1[,\mathbb{R})$ et F une primitive de f (on a donc $F \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$).

On pose $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$.

1. Montrer que f est borélienne c'est-à-dire mesurable quand on munit $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ de leur tribu borélienne.
2. On suppose maintenant que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$ (on a donc $f \in \mathcal{M}_+$).

(a) Montrer que $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(b) On suppose dans cette question que $\lim_{x\to 1^-} F(x) \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{x\to 0^+} F(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$. [On pourra utiliser les exercices 4.4 et 4.5.]

(c) On suppose maintenant que $\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$ ou que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$. Montrer que $f \notin \mathcal{L}^1$ (on a donc $\int f d\lambda = +\infty$).

Exercice 4.8 ($f, g \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. [On pourra utiliser l'exercice 4.7.]

Corrigé – *On pose $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Un exemple consiste à prendre $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in]0,1[$. Selon l'exercice 4.7, on a bien $f, g \in \mathcal{L}^1$, car une primitive de f et g est la fonction F définie par $F(x) = 2\sqrt{x}$, et $fg \notin \mathcal{L}^1$ car une primitive de fg est la fonction G définie par $G(x) = \ln x$.*

Exercice 4.9 (Majoration d'une fonction intégrable décroissante) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Montrer que f est borélienne (et donc borélienne positive).

Corrigé – *Soit $\alpha > 0$. comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$ l'ensemble $f^{-1}([\alpha,+\infty[)$ est un intervalle du type $]0,\beta[$ ou $]0,\beta]$ (avec $\beta \geq 0$), c'est donc un borélien. Si $\alpha \leq 0$, on a $f^{-1}([\alpha,+\infty[) = \mathbb{R}$, qui est aussi un borélien. Comme l'ensemble des intervalles $[\alpha,+\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est borélienne.*

2. On suppose que $\int f d\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \leq C/x$ pour tout $x > 0$.

Corrigé – *Soit $x > 0$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ on a $f(y) \geq f(x)$ pour tout $y \in]0,x[$ et donc $|f| \geq f(x)1_{]0,x]}$. En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}$, on en déduit $xf(x) \leq \|f\|_1$, ce qui est l'inégalité demandée avec $C = \|f\|_1$.*

3. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si on retire l'hypothèse de décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ (même si f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$).

Corrigé – *Il suffit de prendre une fonction f intégrable, positive, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$. Un tel exemple est $f = \sum_{n>2} \varphi_n$ avec*

$$\varphi_n(x) = n^2(x - n + \frac{1}{n^2}) \text{ si } n - \frac{1}{n^2} \leq x \leq n,$$
$$\varphi_n(x) = -n^2(x - n - \frac{1}{n^2}) \text{ si } n < x \leq n + \frac{1}{n^2},$$
$$\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [n - \frac{1}{n^2}, [n + \frac{1}{n^2}].$$

Exercice 4.10 (Caractérisation d'une fonction caractéristique) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ p.p. et que $\int f\,dm = \int f^2\,dm$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = 1_A$ p.p..

Corrigé – *On remarque que* $\int f(1-f)\,dm = 0$. *Comme* $0 \leq f \leq 1$ *p.p., on a* $f(1-f) \geq 0$ *p.p., on en déduit que* $f(1-f) = 0$ *p.p.. On pose* $A = \{f = 1\}$, *on a alors* $f = 0$ *p.p. sur* A^c, *ce qui donne bien* $f = 1_A$ *p.p..*

Exercice 4.11 (f positive intégrable implique f finie p.p.) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f\,dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

Corrigé – *Cet exercice a été vu dans ce chapitre. On redonne une preuve ici.*
Soit $A = f^{-1}(\{+\infty\})$. *On a* $A \in T$ *car* f *est mesurable et* $\{+\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $f \geq n1_A$, *donc, par monotonie de l'intégrale,* $\int f\,dm \geq nm(A)$, *ou encore*

$$m(A) \leq \frac{1}{n}\int f\,dm.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, *on en déduit* $m(A) = 0$. *On a donc* $f < +\infty$ *p.p. car* $f(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in A^c$.

Exercice 4.12 (Une caractérisation de l'intégrabilité) Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \geq n\}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \leq n+1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u|dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\,m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty.$$

Corrigé – *On remarque tout d'abord que* $B_n, A_n \in T$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n1_{B_n} \leq |u| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)1_{B_n}.$$

On en déduit (en utilisant le théorème de convergence monotone et la monotonie de l'intégrale) que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,m(B_n) \leq \int |u|dm \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)m(B_n). \tag{4.18}$$

Si $\int |u|dm < +\infty$, *on a donc* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,m(B_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,m(B_n) < +\infty$, *on a aussi* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)m(B_n) < +\infty$ *car* $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \leq m(E) < +\infty$ *(remarquer que* $B_n \cap B_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$*). On déduit donc de (4.18) que* $\int |u|dm < +\infty$.

On a ainsi montré que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n).$$

On peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n *par* $C_n = \{x \in E, n \leq |u(x)| < n+1\}$. *On a donc aussi :*

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n). \tag{4.19}$$

Pour terminer la question, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{4.20}$$

Pour montrer (4.20), on remarque que $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et donc, comme* $A_{n+1} \subset A_n$ *et que* $m(A_{n+1}) \leq m(A_n) \leq m(E) < +\infty$ *:*

$$m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_{p+1})$$
$$= \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=1}^{n+1} (p-1) m(A_p) = \sum_{p=1}^{n} m(A_p) - n\, m(A_{n+1}).$$

On a donc :

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) \leq \sum_{p=1}^{n} m(A_p), \tag{4.21}$$

et :

$$\sum_{p=1}^{n} m(A_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) + n\, m(A_{n+1}). \tag{4.22}$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$*, on déduit donc de (4.21) que* $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$*. On a, par (4.19),* $\int |u| dm < +\infty$ *et donc, comme* $n 1_{A_{n+1}} \leq |u|$*, on a aussi* $n\, m(A_{n+1}) \leq \int |u| dm < +\infty$*. On déduit donc de (4.22) que* $\sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$*. Comme* $m(A_0) \leq m(E) < +\infty$*, on a bien finalement* $\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$.

On a bien montré (4.20), ce qui termine la question.

2. Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(A_n) < +\infty.$$

Corrigé – *La fonction $|u|^p$ est mesurable car composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue.*

On reprend maintenant le raisonnement de la question précédente. On remarque que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) \leq \int |u|^p dm \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n). \tag{4.23}$$

Si $\int |u|^p dm < +\infty$, *on a donc* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty$, *on a aussi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^p n^p m(\mathrm{B}_n) < +\infty$$

et $m(\mathrm{B}_0) \leq m(\mathrm{E}) < +\infty$. *On a donc* $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n) < +\infty$. *Ceci donne* $\int |u|^p dm < +\infty$ *par (4.23).*

On a ainsi montré que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty.$$

Ici aussi, on peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n *par* $\mathrm{C}_n = \{x \in \mathrm{E}, n \leq |u(x)| < n+1\}$. *On a donc aussi :*

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty. \tag{4.24}$$

Pour terminer la question, il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < +\infty. \tag{4.25}$$

Pour montrer (4.25), on utilise, comme dans la question précédente que $\mathrm{C}_n = \mathrm{A}_n \setminus \mathrm{A}_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et donc :*

$$m(\mathrm{C}_n) = m(\mathrm{A}_n) - m(\mathrm{A}_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_n) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_n) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1} (n-1)^p m(\mathrm{A}_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n) - \mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) \leq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n), \tag{4.26}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) + \mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}). \tag{4.27}$$

Pour conclure, on remarque que $\dfrac{n^p-(n-1)^p}{n^{p-1}} \to p$ *quand* $n \to +\infty$*. Il existe donc* $\alpha, \beta > 0$ *t.q.* $\alpha n^{p-1} \le n^p-(n-1)^p \le \beta n^{p-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

Si $\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < \infty$*, on déduit alors de (4.26) que* $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty$*.*

Réciproquement, on suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty$*. On a alors, par (4.24),* $\int |u|^p dm < \infty$ *et donc, comme* $\mathrm{N}\, 1_{\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}} \le |u|$*, on a aussi* $\mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{n+1}) \le \int |u|^p dm < \infty$*. On déduit alors de (4.27) que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < \infty.$$

On a bien montré (4.25), ce qui termine la question.

Exercice 4.13 (Sur la convergence en mesure) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure et $g_n \to g$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$k \ge k_1 \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}\,;\, |g(x)| \ge k\}) \le \varepsilon.$$

Corrigé – *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $\mathrm{A}_k = \{x \in \mathrm{E}\,;\, |g(x)| \ge k\}$*. On a donc* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_k = \emptyset$*. Comme* g *est intégrable, on a* $m(\mathrm{A}_k) \le \|g\|_1/k < +\infty$*. On peut donc appliquer la continuité décroissante de* m*, on obtient que* $m(\mathrm{A}_k) \to 0$ *quand* $k \to +\infty$*, ce qui donne le résultat souhaité.*

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$n \ge n_0,\ k \ge k_0 \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}\,;\, |f_n(x)| \ge k\}) \le \varepsilon.$$

Corrigé – *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$*. On a*

$$\{|f_n| \ge k\} \subset \{|f| \ge k-1\} \cup \{|f_n - f| \ge 1\},$$

et donc

$$m(\{|f_n| \ge k\} \le m(\{|f| \ge k-1\}) + m(\{|f_n - f| \ge 1\}).$$

Soit $\varepsilon > 0$*. Comme* f *est intégrable, il existe (comme à la question précédente)* k_0 *t.q.*

$$k \ge k_0 \Rightarrow m(\{|f| \ge k-1\}) \le \varepsilon.$$

Puis comme $f_n \to f$ *en mesure, il existe* n_0 *t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| \ge 1\}) \le \varepsilon.$$

On a donc

$$k \ge k_0,\ n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n| \ge k\} \le 2\varepsilon.$$

Ce qui donne le résultat souhaité.

(c) Montrer que $fg \in \mathcal{M}$ et $f_n g_n \to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$. [On pourra remarquer que $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$.]

Corrigé – *Soit $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$. On remarque que*

$$\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\} \subset \{|f_n(g_n - g)| \geq \frac{\delta}{2}\} \cup \{|g(f_n - f)| \geq \frac{\delta}{2}\}.$$

Pour tout $k > 0$, on a donc

$$\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\} \subset \{|f_n| \geq k\} \cup \{|g_n - g| \geq \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| \geq k\} \cup \{|f_n - f| \geq \frac{\delta}{2k}\}.$$

Grâce aux deux questions précédentes, il existe donc k_1, k_0 et n_0 t.q. avec $k = \max\{k_1, k_0\}$,

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\}) \leq 2\varepsilon + m(\{|g_n - g| \geq \frac{\delta}{2k}\}) + m(\{|f_n - f| \geq \frac{\delta}{2k}\}).$$

En utilisant les convergences en mesure de f_n et g_n, on obtient alors l'existence de n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\}) \leq 4\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n g_n \to fg$ en mesure.

(d) En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé – *On peut, par exemple, prendre f et g définies par $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ pour $x \in]0, 1[$ et $f(x) = g(x) = 0$ si $x \notin]0, 1[$. (Et on prend $f_n = f$ et $g_n = g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.)*

2. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $f_n g_n \not\to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$ (pour cet exemple, on a donc $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ou $g \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

Corrigé – *On peut prendre, par exemple,*

$$f_n(x) = \frac{x}{n(x^2+1)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

$$g_n(x) = x^2 + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.14 (Sur l'inégalité de Markov) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \leq \int_{\{|f|>a\}} |f| dm$.

Corrigé – *Comme $|f| \in \mathcal{M}_+$, la méthode pour faire les questions 1 et 2 a déjà été vue (voir l'inégalité (4.6)).*

Soit $a > 0$. On remarque que $|f| 1_{\{|f|>a\}} \geq a 1_{\{|f|>a\}}$. Par monotonie de l'intégrale, on en déduit :

$$am(\{|f| > a\}) = \int a 1_{\{|f|>a\}} dm \leq \int |f| 1_{\{|f|>a\}} dm = \int_{\{|f|>a\}} |f| dm.$$

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \leq (\int |f| dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)

Corrigé – *Comme* $\int_{\{|f|>a\}} |f| dm \leq \int |f| dm$, *cette question découle immédiatement de la précédente.*

3. Montrer que

$$\lim_{a\to\infty} a\, m(\{|f| > a\}) = 0. \tag{4.28}$$

Corrigé – *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *t.q.* $a_n \to +\infty$, *quand* $n \to +\infty$. *On pose*

$$g_n = |f| 1_{\{|f|>a_n\}}.$$

On a $g_n \to 0$ *p.p. quand* $n \to +\infty$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|g_n| \leq |f|$ *p.p.. Grâce au théorème de convergence dominée, on en déduit que* $\int g_n dm \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc, avec la question 1,* $a_n m(\{|f| > a_n\}) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (4.28) dans les 2 cas suivants : $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$.

Corrigé – *Dans le cas* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *il suffit de prendre* $f = 1_{\mathbb{R}}$.

Dans le cas $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$, *on peut prendre, par exemple,* f *définie par* $f(x) = \frac{1}{x|\ln(2x)|}$ *pour* $x \in]0,1[$. *La fonction* f *est mesurable mais n'est pas intégrable. Pour* $a > 0$, *on a* $am(\{|f| > a\}) = ax_a$ *avec* $x_a > 0$ *t.q.* $x_a|\ln(2x_a)| = \frac{1}{a}$. *On a* $x_a \to 0$ *quand* $a \to \infty$ *et donc* $am(\{|f| > a\}) = ax_a = \frac{1}{|\ln(2x_a)|} \to 0$ *quand* $a \to \infty$.

Exercice 4.15 (Sur la positivité presque partout.) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que :

$$f \geq 0 \text{ p.p.} \Longleftrightarrow \int_A f\, dm \geq 0 \text{ pour tout } A \in T.$$

Corrigé – *On suppose d'abord que* $f \geq 0$ *p.p.. Soit* $A \in T$, *on a alors* $f 1_A \geq 0$ *p.p. et donc, par monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{L}^1$ *(proposition 4.26 page 186),* $\int_A f dm = \int f 1_A dm \geq 0$.

En fait, pour être tout à fait précis, la proposition 4.26 est énoncée avec l'hypothèse "$f \geq g$*" et non seulement "*$f \geq g$ *p.p.". Toutefois il est clair que cette proposition est aussi vraie avec seulement "*$f \geq g$ *p.p.". Il suffit de remarquer que, si* $f \geq g$ *p.p., il existe* $B \in T$ *t.q.* $m(B) = 0$ *et* $f \geq g$ *sur* B^c. *On a donc* $f 1_{B^c} \geq g 1_{B^c}$. *Si* $f, g \in \mathcal{L}^1$, *la proposition 4.26 donne alors* $\int f 1_{B^c} dm \geq \int g 1_{B^c} dm$. *On en déduit* $\int f dm \geq \int g dm$ *car* $\int f dm = \int f 1_{B^c} dm$ *et* $\int g dm = \int g 1_{B^c} dm$ *(voir la proposition 4.28 page 188).*

On suppose maintenant que $\int_A f\,dm \geq 0$ *pour tout* $A \in T$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on choisit* $A = A_n = \{f \leq -\frac{1}{n}\} = \{x \in E : f(x) \leq -\frac{1}{n}\}$, *de sorte que* $f 1_{A_n} \leq -\frac{1}{n} 1_{A_n}$. *La monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{L}^1$ *(proposition 4.26 page 186) donne alors*

$$\int f 1_{A_n} dm \leq -\frac{1}{n} m(A_n).$$

Comme $\int f 1_{A_n} dm \geq 0$ *par hypothèse, on a donc nécessairement* $m(A_n) = 0$.

Par σ*-sous additivité de m, on en déduit que* $m(\{f < 0\}) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{f \leq -\frac{1}{n}\}) = 0$, *et donc* $f \geq 0$ *p.p..*

Exercice 4.16 (Intégrale sur des ensembles "petits" et "petitesse à l'infini")

Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int_A |f| dm \leq \varepsilon$. [Introduire $f_n = \inf(|f|, n)$.]

   Corrigé – *On pose* $f_n = \inf(|f|, n)$. *Comme* $f_n \uparrow |f|$ *quand* $n \to +\infty$ *(c'est-à-dire que* f_n *tend vers* $|f|$ *simplement et en croissant), on peut appliquer le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Il donne*

   $$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int |f| dm$$

   et donc, comme $\int |f| dm < +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \int (|f| - f_n) dm = 0$.

   Soit $\varepsilon > 0$, *il existe donc* $n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\int (|f| - f_n) dm \leq \varepsilon$. *Pour* $A \in T$, *on a donc :*

   $$\begin{aligned}\int_A |f| dm &\leq \int_A (|f| - f_n) dm + \int_A f_n dm \\ &\leq \int (|f| - f_n) dm + \int_A f_n dm \leq \varepsilon + n m(A).\end{aligned}$$

   En prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$, *on en déduit :*

   $$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq 2\varepsilon.$$

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :

   $$\text{(i) } m(C) < +\infty, \qquad \text{(ii) } \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon, \qquad \text{(iii) } \sup_C |f| < +\infty.$$

   [Considérer $C_n = \{x \in E; \dfrac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$, et montrer que pour $n \geq n_0$ où n_0 est bien choisi, C_n vérifie (i), (ii) et (iii).]

   Corrigé – *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $C_n = \{x \in E; \dfrac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $|f| \leq n$ *sur* C_n *et* $\frac{1}{n} m(C_n) \leq \int |f| dm < \infty$. *Les conditions (i) et (iii) sont donc vérifiées si on prend* $C = C_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. *On va maintenant montrer qu'on peut choisir n de manière à avoir aussi (ii). Pour cela, on pose* g_n *par* $g_n = |f|1_{C_n}$, *de sorte que* $g_n \uparrow |f|$. *Le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) appliqué à la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donne alors* $\lim_{n\to+\infty}\int g_n dm = \int |f| dm$ *et donc, comme à la question précédente,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int(|f|-g_n)dm = 0.$$

En remarquant que $\int(|f|-g_n)dm = \int_{C_n^c}|f|dm$, *Il existe donc* $n \in \mathbb{N}^*$ *t.q. (ii) soit vérifiée. En prenant* $C = C_n$, *on a donc (i), (ii) et (iii).*

Exercice 4.17 (Intégration par rapport à une mesure image) Cet exercice est une généralisation à un espace mesuré quelconque du théorème de la loi image (théorème 4.58) qui est restreint à un espace probabilisé. Soit (E, T, m) un espace mesuré, (F, S) un espace mesurable et f de E dans F. On suppose que f est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in S$. Pour tout $B \in S$, on pose $\mu(B) = m(f^{-1}(B))$ (On note souvent $\mu = f_* m$).

1. Montrer que μ est une mesure sur S (on l'appelle *mesure image* de m par f).

   Corrigé – *On remarque tout d'abord que* μ *est bien application de* S *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et que* $\mu(\emptyset) = 0$ *(car* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ *et* $m(\emptyset) = 0$*).*

   On montre maintenant la σ*-additivité de* μ. *Soit* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* S *disjoints deux à deux. On pose* $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. *On veut montrer que* $\mu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$. *La suite* $(f^{-1}(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* T, *disjoints deux à deux. La* σ*-addivité de m donne alors*

   $$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f^{-1}(B_n)).$$

   Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = f^{-1}(B)$, *on a donc*

   $$\mu(B) = m(f^{-1}(B)) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n).$$

   Ceci prouve bien que μ *est* σ*-additive et donc que* μ *est une mesure (sur* S*).*

2. μ est-elle finie (resp. σ-finie, diffuse) lorsque m est finie (resp. σ-finie, diffuse) ?

   Corrigé – *On a* $\mu(F) = m(f^{-1}(F)) = m(E)$. *La mesure* μ *est donc finie si la mesure m est finie,*

   Par contre, si la mesure m est σ*-finie, la mesure* μ *n'est pas nécessairement* σ*-finie. Un exemple simple est obtenu en prenant* $E = F = \mathbb{R}$, $T = S = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m = \lambda$ *et* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *On a alors, pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

   $$\mu(A) = \begin{cases} +\infty \text{ si } 0 \in A, \\ 0 \text{ si } 0 \notin A. \end{cases}$$

   La mesure m est bien σ*-finie mais la mesure* μ *n'est pas* σ*-finie.*

   Le même exemple montre que m peut être diffuse sans que μ *soit diffuse. En effet, dans l'exemple précédent, la mesure m est diffuse alors que* $\mu(\{0\}) = +\infty > 0$.

3. Montrer qu'une fonction Φ mesurable de F dans $\mathbb{R}$ est $\mu-$intégrable si et seulement si $\Phi \circ f$ est m-intégrable et que dans ce cas

$$\int_E \Phi \circ f \, dm = \int_F \Phi \, d\mu. \tag{4.29}$$

Corrigé – *On raisonne ici en commençant par considérer* $\Phi = 1_B$ *(avec* $B \in S$*) puis* $\Phi \in \mathcal{E}_+(F,S)$ *et* $\Phi \in \mathcal{M}_+(F,S)$.

Soit $B \in S$ *et* $\Phi = 1_B$. *On a alors*

$$\int_F \Phi d\mu = \mu(B) = m(f^{-1}(B)) = \int_E 1_{f^{-1}(B)} dm$$
$$= \int_E 1_B(f(x)) dm(x) = \int_E \Phi \circ f \, dm. \tag{4.30}$$

On suppose maintenant que $\Phi \in \mathcal{E}_+(F,S)$. *Il existe donc* $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}_+$ *et* $A_1, \ldots, A_p \in S$ *t.q.* $\Phi = \sum_{i=1}^p \alpha_i \Phi_i$ *avec* $\Phi_i = 1_{A_i}$. *Par linéarité positive de* μ *et m, on en déduit, avec* (4.30),

$$\int_F \Phi d\mu = \sum_{i=1}^p \alpha_i \int_F \phi_i d\mu = \sum_{i=1}^p \alpha_i \int_E \phi_i \circ f \, dm$$
$$= \int_E \sum_{i=1}^p \alpha_i \Phi_i \circ f \, dm = \int_E \Phi \circ f \, dm.$$

On peut maintenant considérer le cas $\Phi \in \mathcal{M}_+(F,S)$. *Il existe alors une suite* $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}_+(F,S)$ *t.q.* $\Phi_n \uparrow \Phi$. *Comme* $\int_F \phi_n d\mu = \int_E \phi_n \circ f \, dm$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le théorème de convergence monotone (ou simplement la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$*) donne alors* $\int_F \phi d\mu = \int_E \phi \circ f \, dm$. *L'égalité* (4.29) *est donc vraie pour tout* $\Phi \in \mathcal{M}_+(F,S)$.

Enfin, soit Φ *mesurable de* F *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire* $\Phi \in \mathcal{M}(F,S)$*). En utilisant* (4.29) *avec* Φ^+ *et* Φ^- *(et en notant que* $(\Phi \circ f)^+ = \Phi^+ \circ f$ *et* $(\Phi \circ f)^- = \Phi^- \circ f$*) on obtient que* Φ *est* μ*-intégrable si et seulement si* $\Phi \circ f$ *est m-intégrable et que, si* Φ *est* μ*-intégrable,* (4.29) *est vraie.*

Exercice 4.22 (Application du théorème de convergence monotone)

Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ (λ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0,1])$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx}f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   Corrigé – *La fonction $x \mapsto e^{nx}$ est continue donc mesurable (de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, tous deux munis de la tribu borélienne). La fonction $x \mapsto e^{nx}f(x)$ est donc mesurable comme produit de fonctions mesurables.*

   On remarque ensuite que $\int |e^{nx}f(x)|d\lambda(x) \le e^{n\mathrm{T}}\|f\|_1 < \infty$. On en déduit que la fonction $x \mapsto e^{nx}f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \ge 0$ p.p. et qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx}f(x)\,d\lambda(x) \le \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]

   Corrigé – *On pose $\mathrm{A} = \{f > 0\} = \{x \in \mathrm{E};\ f(x) > 0\}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A} \setminus \{0\}$. Comme f est mesurable, on a $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{B}([0,1])$.*

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = e^{nx}|f(x)|$ pour $x \in [0,1]$. On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec g définie par :

   $$g(x) = \infty,\ \ si\ x \in \mathrm{B},$$
   $$g(x) = 0,\ \ si\ x \in]0,1] \setminus \mathrm{B},$$
   $$g(0) = |f(0)|.$$

   Le théorème de convergence monotone donne que $g \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to +\infty$. Comme $g_n = e^{n\cdot}f$ p.p., on a $\int g_n dm = \int e^{nx}f(x)\,d\lambda(x) \le \mathrm{M}$ et donc, en passant à limite quand $n \to +\infty$, $\int g dm \le \mathrm{M}$.

   On a aussi $h_n \uparrow g$ avec $h_n = n1_{\mathrm{B}} + |f(0)|1_{\{0\}}$.
   La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors $\int g dm = \lim_{n\to+\infty} n\lambda(\mathrm{B})$ et donc $\int g dm = \infty$ si $\lambda(\mathrm{B}) > 0$. Comme $\int g dm \le \mathrm{M}$, on a donc $\lambda(\mathrm{B}) = 0$ et donc aussi $\lambda(\mathrm{A}) = 0$, ce qui donne $f = 0$ p.p..

3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

   Corrigé – *On pose toujours $\mathrm{A} = \{f > 0\} = \{x \in \mathrm{E};\ f(x) > 0\}$. Comme f est continue, l'ensemble A est un ouvert de $[0,1]$. Si $\mathrm{A} \ne \emptyset$, il existe un intervalle ouvert non vide inclus dans A et donc $\lambda(\mathrm{A}) > 0$ en contradiction avec le résultat de la question précédente qui donne $\lambda(\mathrm{A}) = 0$. On a donc $\mathrm{A} = \emptyset$, c'est-à-dire $f = 0$ sur tout $[0,1]$.*

Exercice 4.23 (Distance associée à la convergence en mesure) Soient $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré fini. On pose, pour f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $f,g \in \mathcal{M}$) :

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}dm.$$

1. Montrer que d est bien définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire que $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ pour tout $f, g \in \mathcal{M}$) et que d est une semi–distance sur $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire que $d(f,g) = d(g,f)$, pour tout $f,g \in \mathcal{M}$, et que $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$, pour tout $f,g,h \in \mathcal{M}$).
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \subset \mathcal{M}$. Montrer que f_n converge en mesure vers f lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$. [Il est probablement utile de considérer, pour $\varepsilon > 0$, les ensembles $\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$.]

Exercice 4.24 (Lemme de Fatou et convergence en mesure)

Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables (de E dans $\mathbb{R}$) et f une fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$). On suppose que f_n tend vers f en mesure quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < 1/2^k$ pour tout $n \geq n_k$. En déduire qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (la fonction φ est donc strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

Corrigé – *Selon la définition de la convergence en mesure, définition 3.40, on a* $\lim_{n\to+\infty} m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$. *On en déduit l'existence de* n_k.
Il suffit, par exemple, de prendre $\varphi(0) = n_0$, *puis, pour tout* $k > 1$, $\varphi(k) = \max\{n_k, \varphi(k-1)+1\}$. *La fonction* φ *est strictement croissante et*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_{\varphi(n)}$, $\mathrm{A}_n = \{|g_n - f| \geq \varepsilon\}$, et $\mathrm{B}_n = \cup_{p=n}^{\infty} \mathrm{A}_p$.

(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} m(\mathrm{B}_n) = 0$.

Corrigé – *Par* σ*-sous additivité de* m, *on a*

$$m(\mathrm{B}_n) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} m(\mathrm{A}_p) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

car la première question donne que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$. En déduire que

$$\int_{\mathrm{B}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq \int_{\mathrm{A}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq 2 \int |g_n| dm. \tag{4.34}$$

Corrigé – *Soit* $x \in \{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap A_n^c$. *Comme* $x \in A_n^c$, *on a* $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *et donc* $|g_n(x)| > |f(x)| - \varepsilon$. *Comme* $|f(x)| \geq 2\varepsilon$ *on a donc* $|g_n(x)| > \varepsilon$. *On en déduit que*

$$|f(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x)| \leq 2|g_n(x)|.$$

On a bien montré que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap A_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$.

Comme $A_n \subset B_n$, *on a* $B_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\} \subset A_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}$. *Cette inclusion donne la première inégalité de* (4.34). *Puis comme* $|f| \leq 2|g_n|$ *sur* $A_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}$, *on obtient la seconde inégalité de* (4.34).

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int |f_n| dm \leq M$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\int_{\{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq 2M. \tag{4.35}$$

[On pourra noter que $\int |g_n| dm \leq M$, utiliser (4.34) et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé – *En reprenant les ensembles* B_n *de la question précédente on a*

$$\int |f| 1_{B_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2 \int |g_n| dm \leq 2M.$$

La suite d'ensembles $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante. La suite* $(B_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante. On pose* $B = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, *de sorte que* $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c = B^c$. *La suite de fonctions* $(|f| 1_{B_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc (simplement) en croissant vers* $|f| 1_{B^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}}$. *Le théorème de convergence monotone donne alors que*

$$\int |f| 1_{B^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2M.$$

On utilise maintenant la continuité décroissante de m et la question 1(b). On obtient que $m(B) = \lim_{n\to+\infty} m(B_n) = 0$. *On en déduit que*

$$\int |f| 1_{\{|f| \geq 2\varepsilon\}} dm = \int |f| 1_{B^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2M.$$

(b) Montrer que

$$\int |f| dm \leq 2M. \tag{4.36}$$

[On pourra utiliser (4.35) avec $\varepsilon = 1/n$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *la question précédente donne*

$$\int |f| 1_{\{|f| \geq \frac{2}{n}\}} dm \leq 2M.$$

Quand $n \to +\infty$, $|f| 1_{\{|f| \geq \frac{2}{n}\}} \uparrow |f|$. *On peut encore appliquer le théorème de convergence monotone, il donne* (4.36).

(c) En modifiant légérement la technique utilisée à la première question, montrer que (4.36) reste vrai avec αM au lieu de $2M$ dès que $\alpha > 1$.

En déduire que (4.36) reste vrai avec M au lieu de 2M.

Corrigé – *Soit $\eta > 0$. A la question 1(c), on remplace l'ensemble $\{|f| \geq 2\varepsilon\}$ par $\{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\}$.*

Soit $x \in \{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\} \cap A_n^c$. Comme $x \in A_n^c$, on a $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ et donc $|g_n(x)| > |f(x)| - \varepsilon$. Comme $|f(x)| \geq (1+\eta)\varepsilon$ on a donc $|g_n(x)| > \eta\varepsilon$. On en déduit que

$$|f(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x)| \leq \frac{\eta+1}{\eta}|g_n(x)|.$$

On a donc $\{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\} \cap A_n^c \subset \{|f| \leq \frac{\eta+1}{\eta}|g_n|\}$.

On obtient ainsi, au lieu de (4.34),

$$\int_{B_n^c \cap \{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\}} |f| dm \leq \frac{\eta+1}{\eta} \int |g_n| dm.$$

On reprend alors les questions 2(a) et 2(b) en appliquant toujours le théorème de convergence montone. On obtient $\int |f| dm \leq \frac{\eta+1}{\eta} M$.

Si $\alpha > 1$, il est possible de choisir $\eta > 0$ pour que $(\eta+1)/\eta = \alpha$. On obtient donc $\int |f| dm \leq \alpha M$. Enfin, comme α est arbitrairement proche de 1, on en déduit bien que $\int |f| dm \leq M$.

NB. Une autre méthode pour démontrer (4.36) (avec M au lieu de 2M) consiste à remarquer qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. (ceci est une conséquence de la convergence en mesure de f_n vers f, exercice 3.29). Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou pour conclure.

Exercice 4.25 (Convergence p.p. et convergence vague)

On note $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = \cup_{i=0}^{n-1}]\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n^3}[$ et on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n = n^2 1_{B_n}$.

1. Montrer que $f_n \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n\|_1 = 1$.

Corrigé – *L'ensemble B_n est un borélien et donc f_n est borélienne positive. on a ensuite, par σ- additivité de λ,*

$$\int f_n d\lambda = n^2 \lambda(B_n) = n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(]\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n^3}[) = n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^3} = 1.$$

On a donc $f_n \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n\|_1 = 1$ (ce qui est équivalent à dire $\lambda(B_n) = n^2$).

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $C_p = \cup_{q=p}^{+\infty} B_q$. Soit $x \in C_p^c$. Montrer que $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *$C_p^c = \cap_{q=p}^{+\infty} B_q^c$. Pour tout $q > p$, on a donc $x \in B_q^c$ et donc $f_q(x) = 0$. On en déduit bien que $\lim_{q\to+\infty} f_q(x) = 0$.*

3. Montrer que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Avec les notations de la question précédente, on a* $\lim_{n\to+\infty} f_q(x) = 0$ *pour tout* $x \in \cup_{p\in\mathbb{N}^*} C_p^c$*, c'est-à-dire pour tout* $x \in C^c$ *avec* $C = \cap_{p\in\mathbb{N}^*} C_p$*. Pour en déduire que* $f_n \to 0$ *p.p., il suffit de montrer que* $\lambda(C) = 0$*.*
Soit $p \in \mathbb{N}^*$*. En utilisant la monotonie et la σ-sous-additivité de* λ*, on a*

$$\lambda(C) \le \lambda(C_p) \le \sum_{q=p}^{+\infty} \lambda(B_q) \le \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{1}{q^2}.$$

Comme $\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \to 0$ *quand* $p \to +\infty$*, on en déduit* $\lambda(C) = 0$ *et donc* $f_n \to 0$ *p.p..*

4. Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que

$$\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} (\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n}))dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

En déduire que $\displaystyle\int f_n \varphi d\lambda \to \int_0^1 \varphi(x)dx$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

$$\int f_n \varphi d\lambda = n^2 \int_{B_n} \varphi d\lambda = n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} \varphi(x)dx,$$

et

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \varphi(\frac{i}{n}) \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} dx.$$

On en déduit bien que $\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} (\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n}))dx$*.*
On pose maintenant $\delta_n = \max\{|\varphi(x) - \varphi(y)|, x, y \in [0,1], |x-y| \le 1/n\}$*, de sorte que* $|\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n})| \le \delta_n$ *si* $i/n \le x \le i/n + 1/n^3$*. On a donc*

$$|\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n})| \le \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} |\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n})|dx \le \delta_n.$$

Comme $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, la fonction* φ *est uniformément continue sur* $[0,1]$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$*. Ceci donne bien*

$$\lim_{n\to+\infty} |\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n})| = 0.$$

Comme φ *est continue sur* $[0,1]$*, il est bien connu que* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \int_0^1 \varphi(x)dx$ *(voir le Chapitre 1). On a donc* $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \varphi d\lambda = \int_0^1 \varphi(x)dx$*.*

5. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Corrigé – *Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*. En effet, on a* $f_n \to 0$ *p.p.. Si le théorème de convergence dominée pouvait être appliqué à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, il donnerait, en particulier,* $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = 0$*, ce qui est faux.*

4.11.2 L'espace L^1

Exercice 4.26 (Mesure de densité) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A f dm$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.

Corrigé – *On rappelle que, par définition, pour tout $A \in T$, on a $\int_A f dm = \int f 1_A dm$ avec $f 1_A = 0$ sur A^c et $f 1_A = f$ sur A (on a bien $f 1_A \in \mathcal{M}_+$ et donc $\int_A f dm$ est bien définie).*

On montre maintenant que μ est une mesure.

Il est clair que $\mu(\emptyset) = 0$ car $f 1_A = 0$ (sur tout E) si $A = \emptyset$. Pour montrer que μ est un mesure, il reste à montrer que μ est σ-additive.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on remarque que $1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $f 1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f 1_{A_n}(x)$ pour tout $x \in E$. Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne alors

$$\int f 1_A dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f 1_{A_n} dm,$$

c'est-à-dire $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Ceci prouve que μ est σ-additive et donc que μ est une mesure.

2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$ si et seulement si $fg \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, $\int g d\mu = \int fg dm$.

Corrigé – *On raisonne en trois étapes :*

(a) Soit $g \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_1, \ldots, A_p \in T$ t.q. $g = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i}$. On a alors (en posant $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$) $fg = \sum_{i=1}^p a_i f 1_{A_i} \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int fg dm = \sum_{i=1}^p a_i \int f 1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^p a_i \mu(A_i) = \int g d\mu.$$

(Ce qui, bien sûr, est aussi vrai pour $g = 0$.)

(b) Soit $g \in \mathcal{M}_+$. Il existe alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $g_n \uparrow g$. L'item précédent donne que $\int f g_n dm = \int g_n d\mu$. Avec le théorème de convergence monotone (pour μ et pour m, puisque $f g_n \uparrow fg$ en posant toujours $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$), on en déduit que $fg \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int fg dm = \int g d\mu. \tag{4.37}$$

(c) Soit maintenant $g \in \mathcal{M}$. En appliquant (4.37) à $|g| \in \mathcal{M}_+$, on a :

$$\int |fg| dm = \int f|g| dm = \int |g| d\mu,$$

et donc :

$$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu).$$

En fait, on peut ne pas avoir $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ car fg peut prendre les valeurs $\pm\infty$. L'assertion "$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$" est à prendre, comme d'habitude, au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $fg = h$ p.p.". Ceci est vérifié car si $\int |fg| dm < \infty$, on a $|fg| < \infty$ p.p.. Il suffit alors de changer fg sur un ensemble de mesure nulle pour avoir une fonction mesurable prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, en écrivant (4.37) avec g^+ et g^- (qui sont bien des éléments de $\mathcal{M}_+$) et en faisant la différence on obtient bien que $\int fg dm = \int g d\mu$.

Exercice 4.27 (Suite bornée convergeant dans L^1) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|f_n| \leq C$ p.p. et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int |f_n - f|^2 dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, elle contient une sous-suite qui converge p.p.. c'est-à-dire qu'il existe application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p.. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}| \leq C$ p.p., on en déduit que $|f| \leq C$ p.p..*

Pour conclure, on remarque maintenant que

$$0 \leq \int |f_n - f|^2 dm \leq \int (|f_n| + |f|)|f_n - f| dm \leq 2C \int |f_n - f| dm \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exercice 4.28 (Comparaison de convergence dans L^1) On considère ici l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. On pose $\mu = \delta_1 + \delta_2 + 3\lambda$ (noter que μ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On pose $f_n = f 1_{[-n,n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $L^1(\mu) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\mu)$, et calculer $a_n = \int f_n d\mu$.
2. A-t-on convergence simple, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans $L^1(\mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?.

Exercice 4.29 (Convergence uniforme et convergence des intégrales)

Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$; on suppose que f_n converge uniformément vers f quand $n \to +\infty$ (plus précisément : il existe des représentants des f_n, encore notés f_n, t.q. f_n converge uniformément vers f).

1. A-t-on $f \in L^1$ (plus précisément : existe-t-il $F \in L^1$ t.q. $f = g$ p.p. si $g \in F$) ? [Distinguer les cas $m(E) < +\infty$ et $m(E) = +\infty$.]

2. Si $f \in L^1$ et $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, a-t-on : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$?

Exercice 4.30 (Convergence dans L^1 **de fonctions positives)** Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p., que $f_n \to f$ p.p. et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [On pourra examiner la suite $(f - f_n)^+$.]

Corrigé – *On pose $h_n = (f - f_n)^+$. On a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h_n \to 0$ p.p.. De plus, comme $f_n \geq 0$ p.p., on a $0 \leq h_n \leq f^+$ p.p.. En effet, soit $x \in E$ t.q. $h_n(x) \neq 0$. On a alors, si $f_n(x) \geq 0$ (ce qui est vrai pour presque tout x), $0 < h_n(x) = f(x) - f_n(x) \leq f(x) = f^+(x)$.*

Comme $f^+ \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à cette suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne que $h_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire

$$\int (f - f_n)^+ dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.38}$$

On remarque ensuite que

$$\int (f - f_n)^- dm = \int (f - f_n)^+ dm - \int (f - f_n) dm,$$

et donc, comme $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$,

$$\int (f - f_n)^- dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.39}$$

De (4.38) et (4.39), on déduit

$$\int |f - f_n| dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

c'est-à-dire $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.31 (Exemple de convergence)

On pose $(E, T, m) = ([-1, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = n1_{[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 et que la suite $(\int f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée ?
3. A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$?
4. Montrer que pour toute fonction φ continue de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi d\lambda \to \int \varphi d\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.32 (Théorème de Beppo-Lévi)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$, tels que

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :
$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ou
$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, que l'on note encore f_n.*

L'hypothèse (i) donne qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{A}^c$.

L'hypothèse (ii) donne que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est monotone. On suppose que cette suite est monotone croissante (le cas monotone décroissante est similaire). Il existe alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}_n) = 0$ et $f_{n+1} \geq f_n$ sur A_n^c.

On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)$. On a donc $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$. Puis on pose $g_n = f_n 1_{\mathrm{B}^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathrm{B}^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in \mathrm{B}$. On a bien $f = g$ p.p., $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m))$, $f_n = g_n$ p.p. et $g_{n+1} \geq g_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Enfin $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et $g \in \mathcal{M}$ car g est limite simple d'éléments de $\mathcal{M}$ (voir la proposition 3.19 sur la stabilité de $\mathcal{M}$).

On remarque aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont deux représentants du même élément de $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et $\int f_n dm = \int g_n dm$.

2. Montrer que $f \in \mathrm{L}^1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *On reprend la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la question précédente et on distingue maintenant les 2 cas de l'hypothèse (ii).*

Cas 1 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone croissante.

Dans ce cas, on a $(g_n - g_0) \uparrow (g - g_0)$ quand $n \to +\infty$ et, comme $(g_n - g_0) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.16). Il donne ($(g - g_0) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_n - g_0) dm \to \int (g - g_0) dm \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.40}$$

On sait déjà que $(g-g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g-g_0| dm = \int (g-g_0) dm$ car $(g-g_0) \in \mathcal{M}_+$. La propriété (4.40) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_n - g_0) dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a $\int (g_n - g_0) dm = \int g_n dm - \int g_0 dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p.. Plus précisément :

- *Si la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$, on obtient que $g \in \mathcal{L}^1$) et donc que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p. (on confond donc f et la classe de g, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)\,;\, h = g \text{ p.p.}\}$).*
- *Réciproquement, si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, cela signifie qu'il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = h$ p.p. (on a donc confondu f et la classe de h). Comme $f = g$ p.p., on a aussi $h = g$ p.p.. Comme $g \in \mathcal{M}$, on obtient donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ ce qui donne, par (4.40), que la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.*

Cas 2 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone décroissante.

La démonstration est très voisine de la précécente. On remarque que $(g_0 - g_n) \uparrow (g_0 - g)$ quand $n \to +\infty$ et, comme $(g_0 - g_n) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.16). Il donne ($(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_0 - g_n) dm \to \int (g_0 - g) dm \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.41}$$

On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0| dm = \int (g_0 - g) dm$ car $(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$. La propriété (4.41) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_0 - g_n) dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a $\int (g_0 - g_n) dm = \int g_0 dm - \int g_n dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de $-\infty$).

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p., comme dans le premier cas.

3. On suppose ici que $f \in \mathrm{L}^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *On utilise toujours la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la première question.*

Comme $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ et la propriété (4.40) (ou la propriété (4.41)) donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to +\infty$ et donc

$$\int |g_n - g| dm \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

(On a utilisé ici le fait que $(g_n - g)$ a un signe constant et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.)

Comme $\|f_n - f\|_1 = \int |g_n - g| dm$, on en déduit que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$, quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.33 (Préliminaire pour le théorème de Vitali)

Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et soit $f \in \mathrm{L}^1$ $(= \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \le \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f| dm \le \varepsilon.$$

[Choisir un représentant de f et introduire $f_n = \inf(|f|, n)$].

Corrigé – *En choisissant un représentant de f, cette question est démontrée à la question 1 de l'exercice 4.16.*

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{C}^c} |f| dm \le \varepsilon$.

[Choisir un représentant de f et considérer $\mathrm{C}_n = \{x \in \mathrm{E};\ \frac{1}{n} \le |f(x)|\}$.]

Corrigé – *Ici aussi, en choisissant un représentant de f, cette question est démontrée dans l'exercice 4.16 (question 2).*

(Dans l'exercice 4.16, on choisit $\mathrm{C}_n = \{1/n \le |f| \le n\}$ car on souhaite avoir aussi, pour ce représentant, $\sup_{\mathrm{C}_n} |f| < +\infty$.)

Exercice 4.34 (Théorème de Vitali)

Soient $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1 (= \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m))$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(\mathrm{E}) < +\infty$. Montrer que $f \in \mathrm{L}^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi–intégrable *i.e.* : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. $(\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ n \in \mathbb{N},\ m(\mathrm{A}) \le \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \le \varepsilon)$.

[Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser la question 1 de l'exercice 4.33. Pour le sens $\Leftarrow$, remarquer que $\int |f_n - f| dm = \int_{\mathrm{A}} |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{A}^c} |f_n - f| dm$, utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...]

Corrigé – **Sens($\Rightarrow$)** *Soit* $\varepsilon > 0$. *D'après l'exercice 4.33 (première question), il existe, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n > 0$ *t.q. :*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \le \delta_n \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{4.42}$$

On ne peut pas déduire de (4.42) l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *car on peut avoir* $\inf_{n\in\mathbb{N}} \delta_n = 0$.

Comme $f \in \mathrm{L}^1$, *il existe aussi* $\delta > 0$ *t.q. :*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \le \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f| dm \le \varepsilon. \tag{4.43}$$

On va déduire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en utilisant (4.42) et (4.43).*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, *on a :*

$$\int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \le \int_{\mathrm{A}} |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{A}} |f| dm \le \int |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{A}} |f| dm. \tag{4.44}$$

Comme $f_n \to f$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ *si* $n > n_0$. *Pour* $n > n_0$ *et* $m(\mathrm{A}) \le \delta$, *(4.44) et (4.43) donne donc* $\int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \le 2\varepsilon$. *On choisit alors* $\overline{\delta} = \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{n_0}, \delta\} > 0$ *et on obtient, avec aussi (4.42) (pour tout* $n \le n_0$*) :*

$$n \in \mathbb{N}, \mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \le \overline{\delta} \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \le 2\varepsilon.$$

Ce qui donne l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sens ($\Leftarrow$)

on veut montrer ici que $f \in \mathrm{L}^1$ *et* $\|f_n - f\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. *L'équi-intégrabilité de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donne l'existence de* $\delta > 0$ *t.q. :*

$$n \in \mathbb{N}, \mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \le \overline{\delta} \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \le 2\varepsilon. \tag{4.45}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on choisit maintenant un représentant de* f_n, *encore noté* f_n. *Comme* $f_n \to f$ *p.p., il existe* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{B}) = 0$ *et* $f_n \to f$ *sur* B^c. *En remplaçant* f *par* $f 1_{\mathrm{B}^c}$ *(ce qui ne change* f *que sur un ensemble de mesure nulle, donc ne change pas les hypothèses du théorème), on a alors* $f \in \mathcal{M}$ *car* f *est limite simple de la suite* $(f_n 1_{\mathrm{B}^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *(noter que* f *est bien à valeurs dans* $\mathbb{R}$*). Comme* $m(\mathrm{E}) < +\infty$, *on peut utiliser le théorème d'Egorov (théorème 3.39) ; il donne l'existence de* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *t.q.* $f_n \to f$ *uniformément sur* A^c, *c'est-à-dire* $\sup_{x\in\mathrm{A}^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *On a donc aussi, pour ce choix de* A,

$$\int_{\mathrm{A}^c} |f_n - f| dm \le m(\mathrm{E}) \sup_{x\in\mathrm{A}^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Il existe donc $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\int_{\mathrm{A}^c} |f_n - f| dm \le \varepsilon$ *pour tout* $n \ge n_0(\varepsilon)$. *Avec (4.45), on en déduit, pour tout* $n \ge n_0(\varepsilon)$ *:*

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{\mathrm{A}^c} |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm + \int_{\mathrm{A}} |f| dm \le 2\varepsilon + \int_{\mathrm{A}} |f| dm.$$

Pour majorer le dernier terme de l'inégalité précédente, on utilise le lemme de Fatou sur la suite $(|f_n|1_A)_{n\in\mathbb{N}}$ *(qui est bien dans* $\mathcal{M}_+$*). Comme* $\liminf_{n\to+\infty}|f_n|1_A = |f|1_A$*, il donne avec (4.45),*

$$\int_A |f|dm \le \liminf_{n\to+\infty}\int |f_n|1_A \le \varepsilon.$$

On a donc, finalement,

$$n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow \int |f_n - f|dm \le 3\varepsilon. \tag{4.46}$$

En choisissant $n = n_0(1)$*, on déduit de (4.46) que* $f_n - f \in L^1$ *et donc que* $f = (f - f_n) + f_n \in L^1$*. Cette appartenance étant, comme d'habitude à prendre au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f = g$ *p.p. (en fait, ici, comme nous avons remplacé* f *par* $f1_{B^c}$ *ci-dessus, on a même* $f \in \mathcal{L}^1$*).*

Puis, (4.46) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$*, on a bien montré que* $\|f_n - f\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$*.*

2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$, $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c}|f_n|dm \le \varepsilon$ pour tout n.
[Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser l'exercice 4.33. Pour le sens $\Leftarrow$, utiliser l'exercice 4.33, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.]

Corrigé – **Sens** ($\Rightarrow$)

(a) L'hypothèse $m(E) < +\infty$ *n'a pas été utilisée à la question précédente. La même démonstration donne donc ici l'équi-intégrabilité de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) On utilise maintenant la deuxième question de l'exercice 4.33.

Soit $\varepsilon > 0$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $C_n \in T$ *t.q.* $m(C_n) < +\infty$ *et* $\int_{C_n^c} f_n dm \le \varepsilon$*. Comme* $f \in L^1$*, il existe aussi* $D \in T$ *t.q.* $m(D) < +\infty$ *et* $\int_{D^c} f\,dm \le \varepsilon$*. Enfin, comme* $f_n \to f$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$*, il existe* n_0 *t.q.* $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ *pour tout* $n \ge n_0$*.*

On choisit maintenant $C = D \cup (\bigcup_{n=0}^{n_0} C_n)$*, de sorte que*

$$m(C) < m(D) + \sum_{n=0}^{n_0} m(C_n) < +\infty,$$

$C^c \subset D^c$ *et* $C^c \subset C_n^c$ *si* $n \le n_0$*. Ce choix de* C *nous donne, pour tout* $n \ge n_0$*,*

$$\int_{C^c}|f_n|dm \le \int_{D^c}|f|dm + \int |f_n - f|dm \le 2\varepsilon,$$

et, pour tout $n \le n_0$*,*

$$\int_{C^c}|f_n|dm \le \int_{C_n^c}|f_n|dm \le \varepsilon.$$

On a donc $m(C) < +\infty$ *et* $\int_{C^c}|f_n|dm \le 2\varepsilon$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Sens ($\Leftarrow$)

on veut montrer ici que $f \in L^1$ *et* $\|f_n - f\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. *La deuxième hypothèse donne l'existence de* $C \in T$ *t.q.* $m(C) < +\infty$ *et*

$$\int_{C^c} |f_n| dm \le \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.47}$$

Comme dans la question précédente, on peut supposer (en changeant éventuellement f *sur un ensemble de mesure nulle) que* $f \in \mathcal{M}$. *En appliquant le lemme de Fatou à la suite* $(|f_n| 1_{C^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *on déduit de (4.47) que*

$$\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon. \tag{4.48}$$

La première hypothèse (c'est-à-dire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*) donne l'existence de* $\delta > 0$ *t.q.*

$$n \in \mathbb{N},\ A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{4.49}$$

On peut maintenant utiliser le théorème d'Egorov sur la suite $(f_{n|_C})_{n\in\mathbb{N}}$ *(qui converge p.p. vers* $f_{|_C}$*) dans l'espace mesurable* (C, T_C) *où* T_C *est la tribu* $\{B \in T\,;\, B \subset C\}$. *Il donne l'existence de* $A \subset C$, $A \in T$, *t.q.* $m(A) \le \delta$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* $A^c \cap C$. *On en déduit que*

$$\int_{A^c\cap C} |f_n - f| dm \le m(C) \sup_{x\in A^c\cap C} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Il existe donc n_0 *t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A^c\cap C} |f_n - f| dm \le \varepsilon. \tag{4.50}$$

Enfin, en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n| 1_A)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *on déduit de (4.49) que*

$$\int_A |f| dm \le \varepsilon. \tag{4.51}$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{A^c\cap C} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm + \int_{C^c} |f_n| dm + \int_{C^c} |f| dm,$$

pour déduire de (4.50), (4.49), (4.51), (4.47) et (4.48) que

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int |f_n - f| dm \le 5\varepsilon.$$

On conclut comme à la question précédente. En prenant d'abord $\varepsilon = 1$, *on montre que* $f \in L^1$ *puis, comme* $\varepsilon > 0$ *est arbitraire, on montre que* $f_n \to f$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$.

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

Corrigé – *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *t.q.* $|f_n| \le \mathrm{F}$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant l'exercice 4.33 sur F*, on montre facilement l'équi-intégrabilité de la suite* $(f_n)_n$ *et l'existence, pour tout* $\varepsilon > 0$*, de* $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{C}) < +\infty$ *et* $\int_{\mathrm{C}^c} |f_n| dm \le \varepsilon$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(noter que si* $m(\mathrm{E}) < +\infty$ *cette propriété est immédiate en prenant* $\mathrm{C} = \mathrm{E}$*). Il est alors facile de montrer le théorème de convergence dominée à partir du théorème de Vitali.*

Exercice 4.41 (Paris groupés) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace mesuré tel que $p(\Omega) = 1$. On se donne une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ déléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mathrm{A}_{n+1} \subset (\cup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p)^c$ et $p(\mathrm{A}_n) = 1/2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En prenant $(\Omega, \mathcal{A}, p) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, donner un exemple d'une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les hypothèses demandées.

   Corrigé – *Il suffit de prendre* $\mathrm{A}_n =]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[$.

On se donne aussi une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ avec $\alpha_1 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{G}_n = (-\alpha_n - 1)1_{\mathrm{A}_n} + \alpha_{n+1}1_{\mathrm{A}_{n+1}}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Avec ce choix de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{G}_i$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int \mathrm{H}_n dp = n.$$

   Corrigé – *On construit la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par récurrence.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $\mathrm{G}_n = (-\alpha_n - 1)1_{\mathrm{A}_n} + \alpha_{n+1}1_{\mathrm{A}_{n+1}}$, *on a*
$$\int \mathrm{G}_n dp = (-\alpha_n - 1)p(\mathrm{A}_n) + \alpha_{n+1}p(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{-\alpha_n - 1}{2^n} + \frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}.$$
   On choisit donc, pour $n \geq 1$, $\alpha_{n+1} = 2(\alpha_n + 1) + 2^{n+1}$. *On a bien* $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int \mathrm{H}_n dp = \sum_{i=1}^{n} \int \mathrm{G}_i dp = n$.

3. Pour $x \in \Omega$, on pose $\mathrm{H}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{G}_n(x)$. Montrer que $\mathrm{H}(x)$ est bien défini pour tout $x \in \Omega$ et que $\mathrm{H} = -1$ p.p..

   Corrigé – *Les ensembles* A_n *sont disjoints deux à deux, on a donc* $p(\cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p(\mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/2^n = 1$. *On en déduit que* $p((\cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n)^c) = 0$. *Pour montrer que* $\mathrm{H} = -1$ *p.p., il suffit donc de montrer que* $\mathrm{H}(x) = -1$ *pour tout* $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$.
   Soit $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$, *il existe un unique* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x \in \mathrm{A}_n$.
   Si $n = 1$, *on a alors* $\mathrm{G}_1(x) = -1$ *et* $\mathrm{G}_n(x) = 0$ *pour* $n > 1$. *Donc* $\mathrm{H}(x) = -1$.
   Si $n > 1$, *on a alors* $\mathrm{G}_n(x) = -\alpha_n - 1$, $\mathrm{G}_{n-1} = \alpha_n$ *et* $\mathrm{G}_m(x) = 0$ *si* $m \neq n$ *et* $m \neq n-1$.
   On en déduit bien que $\mathrm{H}(x) = -1$.
   On a bien montré que $\mathrm{H} = -1$ *p.p..*

4. On choisit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie à la question 2 ?

Corrigé – *On a* $\mathrm{H}_n \to \mathrm{H}$ *p.p. mais* $\int \mathrm{H}_n dp \not\to \int \mathrm{H} dp$. *Ceci montre que la suite* $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne vérifie pas les hypothèses du théorème de convergence dominée (c'est, bien sûr, l'hypothèse de domination qui est manquante).*

N.B. Cet exercice a une interprétation probabiliste un peu inattendue. Il permet de montrer que le fait de faire une infinité de paris favorables peut être défavorable.

4.11.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Exercice 4.42 (Espérance et variance de lois usuelles) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle, de loi de probabilité p_{X}. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans les cas suivants :

1. p_{X} est la loi uniforme sur $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) ;
2. p_{X} est la loi exponentielle ;
3. p_{X} est la loi de Gauss.

Exercice 4.43 (Inégalité de Jensen) Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x) - f(a) \geq c_a(x - a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On suppose que X et $f(\mathrm{X})$ sont intégrables. Démontrer l'**inégalité de Jensen** qui s'écrit

$$\int f(\mathrm{X}) d\mathrm{P} \geq f\left(\int \mathrm{X} d\mathrm{P}\right).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

Corrigé – *On utilise le rappel avec* $a = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int \mathrm{X} d\mathrm{P}$. *On obtient pour tout* $\omega \in \Omega$

$$f(\mathrm{X}(\omega)) - f(a) \geq c_a(\mathrm{X}(\omega) - a).$$

Comme les fonctions $f(\mathrm{X}) - f(a)$ *et* $\mathrm{X} - a$ *sont intégrables, la monotonie de l'intégrale donne alors*

$$\int (f(\mathrm{X}) - f(a)) d\mathrm{P} \geq c_a \int (\mathrm{X} - a) d\mathrm{P}.$$

Comme $\int \mathrm{X} d\mathrm{P} = a$, *on en déduit* $\int (f(\mathrm{X}) - f(a)) d\mathrm{P} \geq 0$, *ce qui donne le résultat demandé.*

Exercice 4.44 (Sur l'équi-intégrabilité) Soit $(\mathrm{E}, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_{\mathrm{A}} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} \to 0$, quand $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \to 0$ (avec $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP = 0$,
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n| dP < +\infty$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

Corrigé –

Démonstration de $1 \Rightarrow 2$

Pour montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{A},P)$, *on remarque simplement qu'il existe* $a_0 \in \mathbb{R}_+$ *t.q.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a_0\}} |X_n| dP \le 1.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |X_n| dP = \int_{\{|X_n|>a_0\}} |X_n| dP + \int_{\{|X_n|\le a_0\}} |X_n| dP \le 1 + a_0.$$

Ce qui donne bien une borne pour $\|X_n\|_1$.

On montre maintenant l'équi-intégrabilité. Soit $\varepsilon > 0$, *il existe* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP \le \varepsilon.$$

On choisit $\delta = \varepsilon/a$, *on a alors pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *t.q.* $P(A) \le \delta$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_A |X_n| dP = \int_{A\cap\{|X_n|>a\}} |X_n| dP + \int_{A\cap\{|X_n|\le a\}} |X_n| dP \le \varepsilon + a\delta = 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve l'équi-intégrabilité de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration de $2 \Rightarrow 1$

On pose $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n| dP$. *On a donc* $M < +\infty$ *et pour tout* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(par (4.6)),*

$$P(\{|X_n| > a\}) \le \frac{M}{a}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. *D'après l'equi–intégrabilité de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{A}, P(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |X_n| dP \le \varepsilon$. *On choisit alors* $a_0 = M/\delta$. *On a pour tout* $a \ge a_0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $P(\{|X_n| > a\}) \le M/a \le \delta$, *et donc*

$$\int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP \le \varepsilon.$$

On a bien ainsi montré la propriété 1.

Exercice 4.45 (Caractérisation de l'indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $n \ge 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall (a_1,\ldots,a_n) \in]-\infty,+\infty[^n, P[X_1 \le a_1,\ldots,X_n \le a_n] = \prod_{i=1}^n P[X_i \le a_i]. \tag{4.73}$$

(La notation $P[X \le a]$ est identique à $P(\{X \le a\})$, elle désigne la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \le a\}$.)

Corrigé – *Le fait que l'indépendance de* $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ *entraîne la propriété (4.73) est immédiat car l'ensemble* $\{X_i \le a_i\}$ *appartient à la tribu engendrée par* X_i *(pour tout* $a_i \in \mathbb{R}$ *et* $i \in \{1, \ldots, n\}$*).*

On montre maintenant la réciproque, c'est-à-dire que (4.73) entraîne l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$*. On note* $\mathcal{D} = \{]-\infty, a],\, a \in \mathbb{R}\}$ *et* $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \{\mathbb{R}\}$ *(on a donc* $A \in \mathcal{C}$ *si et seulement si* $A \in \mathcal{D}$ *ou* $A = \mathbb{R}$*). L'hypothèse (4.73) donne*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}) \text{ pour tout } A_i \in \mathcal{D}.$$

Mais, comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, n]$ *une conséquence facile de la continuité croissante de* P *est que*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}) \text{ pour tout } A_i \in \mathcal{C}. \tag{4.74}$$

.

Nous allons, à partir de (4.74), montrer, par récurrence sur q *(*q *allant de* 1 *à* $n+1$*), la propriété suivante :*

$$\begin{gathered} P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}) \\ \text{pour tout } A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A_i \in \mathcal{C} \text{ si } i \ge q. \end{gathered} \tag{4.75}$$

Par définition de v.a.r. indépendantes (définition 3.29), la propriété (4.75) pour $q = n+1$ *donne l'indépendance de* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$*.*

Pour $q = 1$*, la propriété (4.75) est donnée par (4.74). Soit maintenant* $q \in \{1, \ldots, n\}$ *t.q. (4.75) soit vraie. On montre maintenant que (4.75) est encore vraie pour* $q+1$ *au lieu de* q *(ce qui termine la récurrence).*

Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *donnés pour* $i \ne q$*, avec* $A_i \in \mathcal{C}$ *si* $i > q$*. Pour tout* $A_q \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on définit* $m(A_q)$ *et* $\mu(A_q)$ *de la manière suivante :*

$$m(A_q) = P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}),\ \mu(A_q) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}).$$

La σ*-additivité de* P *donne que* m *et* μ *sont des mesures sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. L'hypothèse de récurrence (c'est-à-dire le fait que (4.75) est vraie) donne que ces deux mesures sont égales sur* $\mathcal{C}$*. On peut alors appliquer la proposition 2.31 (car* $\mathcal{C}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie et* $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$*,* $m(\mathbb{R}) < \infty$*). Elle donne que* $m = \mu$ *(sur tout* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*), ce qui montre que (4.75) est encore vraie pour* $q+1$ *au lieu de* q*.*

On a bien terminé la récurrence et montré ainsi l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$*.*

N.B. Une démonstration (probablement plus directe) de cette dernière implication peut se faire en utilisant une généralisation de la proposition 2.31 à $\mathbb{R}^n$*. Cette méthode permet d'éviter la récurrence sur* q*.*

Exercice 4.46 (Sign(X) et |X| pour une gaussienne) On définit la fonction “sign” par :

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}, \quad s \mapsto \mathrm{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0, \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0. \end{cases} \tag{4.76}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et |X| sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

Corrigé – *On pose* $Y = sign(X)$ *et* $Z = |X|$. *Pour montrer que* Y *et* Z *sont indépendantes il suffit de montrer que* $E(\varphi(Y)\psi(Z)) = E(\varphi(Y))E(\psi(Z))$ *pour toutes fonctions* φ *et* ψ *boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(en fait, par définition de l'indépendance, il suffit de considérer* $\varphi = 1_A$ *et* $\psi = 1_B$ *avec* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*

Soit φ, ψ *boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a, en utilisant* $f(-x) = f(x)$ *:*

$$\begin{aligned} E(\varphi(Y)\psi(Z)) &= \int_\Omega \varphi(\mathrm{sign}(X))\psi(|X|)dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\mathrm{sign}(x))\psi(|x|)f(x)dx \\ &= \varphi(1)\int_{\mathbb{R}^+} \psi(x)f(x) + \varphi(-1)\int_{\mathbb{R}_-} \psi(-x)f(x)dx \\ &= (\varphi(1)+\varphi(-1))\int_{\mathbb{R}^+} \psi(x)f(x)dx. \end{aligned}$$

En prenant $\psi = 1_{\mathbb{R}}$, *on a* $E(\varphi(Y)) = \frac{1}{2}(\varphi(1)+\varphi(-1))$ *car* $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

En prenant $\varphi = 1_{\mathbb{R}}$, *on a* $E(\psi(Z)) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x)2f(x)dx$.

On en déduit que $E(\varphi(Y)\psi(Z)) = E(\varphi(Y))E(\psi(Z))$ *pour toutes fonctions* φ *et* ψ *boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et donc que* Y *et* Z *sont indépendantes. On obtient aussi que* $P_Y = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ *et* $P_Z = g\lambda$ *avec* $g = 2f1_{\mathbb{R}_+}$ *(c'est-à-dire que* P_Z *est la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue). Noter que* $E(\varphi(Y)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_Y$ *et* $E(\varphi(Z)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_Z$ *si* φ *est borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *ce qui caractérise* P_Y *et* P_Z *(voir (4.11) ou le théorème 4.58, par exemple).*

Pour montrer l'indépendance de sign(X) *et* X^2, *on remarque que* $X^2 = Z^2$. *Comme* Y *et* Z *sont indépendantes, les v.a.r.* Y *et* Z^2 *sont aussi indépendantes (voir la proposition 3.30) et donc sign*(X) *et* X^2 *sont indépendantes.*

Il reste à trouver la loi de X^2. *On a, pour* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *en utilisant* $f(-x) = f(x)$,

$$E(\varphi(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)f(x)dx = 2\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x^2)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(y)\frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}dy.$$

Ce qui donne $P_{X^2} = h\lambda$ *avec* $h(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ *pour* $x > 0$ *et* $h(x) = 0$ *pour* $x \leq 0$.

Exercice 4.47 (V.a. gaussiennes dépendantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

(le signe "$\sim$" signifie "a pour loi".) Construire deux v.a. Y_1 et Y_2 t.q. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$ et Y_1 et Y_2 soient dépendantes.

Exercice 4.48 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, voir le Chapitre 7.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Corrigé – *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ de sorte que la loi de X est de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note $-A = \{-x, x \in A\}$. Comme f est paire, on a :*

$$P(X \in (-A)) = \int_{-A} f(x)dx = \int_A f(-x)dx = \int_A f(x)dx = P(X \in A).$$

On remarque maintenant que $P(SX \in A) = P(S = 1, X \in A) + P(S = -1, X \in (-A))$. *Comme S et X sont indépendantes, on a :*

$$P(S = 1, X \in A) = P(S = 1)P(X \in A) = \frac{1}{2}P(X \in A),$$
$$P(S = -1, X \in (-A)) = P(S = -1)P(X \in (-A)) = \frac{1}{2}P(X \in (-A)).$$

Comme $P(X \in (-A)) = P(X \in A)$, *on en déduit* $P(SX \in A) = P(X \in A)$. *Les v.a.r. SX et X ont donc même loi, et donc* $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. Montrer que SX et X sont dépendantes.

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose que SX et X sont indépendantes. La proposition 4.59 donne alors* $E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|)$ *(noter que la fonction $s \mapsto |s|$ est borélienne positive). Comme $|S| = 1$ p.s., on a donc :*

$$E(X^2) = E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|) = E(|X|)^2.$$

Comme $E(|X|) < +\infty$, on en déduit que $Var(|X|) = 0$, ce qui est impossible car $|X|$ n'est pas égale p.s. à sa moyenne (sinon, la loi de $|X|$ serait une masse de Dirac et non pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue).

3. Montrer que $Cov(SX, X) = 0$.

Corrigé – *Comme $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $E(SX) = E(X) = 0$. Comme S et X sont indépendantes (et S et X^2 intégrables), on a (proposition 4.59) SX^2 intégrable et $E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$. On en déduit $Cov(SX, X) = E([SX - E(SX)][X - E(X)]) = E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$.*

4. (Question subsidiaire.) On ne suppose plus l'existence de S, mais on suppose qu'il existe Y v.a. gaussienne indépendante de X. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, il est possible d'utiliser Y pour construire S, v.a. indépendante de X et telle que $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

   Corrigé – *Il suffit de prendre* $S = \text{sign}(Y)$ *où la fonction* sign *est définie par* (4.76) *; noter que* sign *'est une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Les variables aléatoires* X *et* S *sont indépendantes (par la proposition 3.30, mais la preuve est facile ici car la tribu engendrée par* $\varphi(Y)$ *est incluse dans celle engendrée par* Y *dés que* φ *est borélienne). Enfin, on a* $P(S = 1) = P(Y > 0) = \frac{1}{2} = P(Y < 0) = P(S = -1)$*, ce qui donne bien* $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Exercice 4.49 (Limite p.s. et indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to +\infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Corrigé – *Soit* ϕ, $\psi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$*. Comme* X_n *et* Y *sont indépendantes, on a (voir la proposition 4.59), pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X_n))E(\psi(Y)). \tag{4.77}$$

Comme φ *est continue, on a* $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ *p.s. et* $\varphi(X_n)\psi(Y) \to \varphi(X)\psi(Y)$ *p.s.. les convergences sont dominées car* $|\varphi(X_n)| \le \sup\{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ *(et* $|\psi(Y)| \le \sup\{\psi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$*). On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée, il donne*

$$\lim_{n\to+\infty} E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X)\psi(Y)) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} E(\varphi(X_n)) = E(\varphi(X)).$$

En passant à la limite dans (4.77), on en déduit que

$$E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y)).$$

La proposition 4.61 permet de conclure que X *et* Y *sont indépendantes.*

Exercice 4.50 (Exponentielle d'une v.a. gaussienne) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit $Y = \exp(X)$. Calculer la moyenne, la variance et la densité de Y (si elle existe).

Corrigé – *On calcule tout d'abord la moyenne et la variance de* Y.

$$E(Y) = \int_\Omega e^X dP = \int_\mathbb{R} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx = \sqrt{e}.$$

$$E(Y^2) = \int_\Omega e^{2X} dP = \int_\mathbb{R} e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx = e^2.$$

On a donc $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = e^2 - e = e(e-1)$.

On cherche maintenant la loi de Y.

Soit φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On a*

$$E(\varphi(Y)) = \int_\mathbb{R} \varphi(e^x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Le changement de variable $y = e^x$ donne alors

$$E(\varphi(Y)) = \int_0^{+\infty} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{\ln(y)^2}{2}} dy.$$

La v.a.r. Y *a donc une densité. Cette densité est donnée par la fonction g définie par :* $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{\ln(y)^2}{2}}$ *si* $y > 0$ *et* $g(y) = 0$ *si* $y \le 0$.

Exercice 4.51 (Loi du χ^2) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer l'espérance, la variance ainsi que la densité de la v.a.r. X^2. (Remarque : cette loi s'appelle loi du χ^2 à 1 degré de liberté.)

Exercice 4.52 (Conséquence du lemme de Borel-Cantelli) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d. de loi normale centrée réduite (c'est-à-dire que la loi de X_1 est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $P(|X_n| > x) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} \exp(\frac{-x^2}{2})$.

Corrigé – *Soit* $x > 0$, *on a*

$$xP(|X_n| > x) = 2x \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} = 1$ p.s..

Corrigé – *Soit* $a \ge 1$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $A_{n,a} = \{|X_n| > a\sqrt{2\ln(n)}\}$ *et* $A_a = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\ge n} A_{k,a}$. *On va montrer les deux propriétés suivantes :*

(p1) $P(A_a) = 0$ *si* $a > 1$.

(p2) $P(A_1) = 1$.

La propriété (p2) donne que $P(\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} \ge 1\}) = 1$ *car*

$$A_1 \subset \{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} \ge 1\}.$$

La propriété (p1) donne que $P(\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} > 1\}) = 0$ *car*

$$\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} > 1\} \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} A_{a+\frac{1}{p}},$$

et $P(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} A_{a+\frac{1}{p}}) \le \sum_{p=1}^{\infty} P(A_{a+\frac{1}{p}}) = 0$. *Il reste à montrer (p1) et (p2). Ce que l'on fait ci après en reprenant la démonstration du lemme de Borel-Cantelli (exercice 2.35).*

Démonstration de (p1). *On a* $\mathrm{P}(\bigcup_{k\ge n} \mathrm{A}_{k,a}) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_{k,a})$. *La 1ere question donne alors, avec* $b = a^2 > 1$

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k\ge n} \mathrm{A}_{k,a}) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a\sqrt{2\ln(k)}} \frac{1}{k^b} \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

car c'est le reste d'une série convergente. Par continuité décroissante de P *on a donc* $\mathrm{P}(\mathrm{A}_a) = 0$.

Démonstration de (p2). *On a*

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k\ge n} \mathrm{A}_{k,1}) = 1 - \mathrm{P}(\bigcap_{k\ge n} \mathrm{A}^c_{k,1}) = 1 - \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}(\bigcap_{k=n}^{m} (\mathrm{A}^c_{k,1})). \tag{4.78}$$

(On a utilisé ici la continuité décroissante de P*). On utilise maintenant l'indépendance des* X_n*, on obtient, pour* $m > n$,

$$b_{n,m} = \mathrm{P}(\bigcap_{k=n}^{m} (\mathrm{A}^c_{k,1})) = \prod_{k=n}^{m} \mathrm{P}(\mathrm{A}^c_{k,1}).$$

Si on montre que $\lim_{m\to\infty} b_{n,m} = 0$ *(pour tout n), on aura, par (4.78),*

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k\ge n} \mathrm{A}_{k,1}) = 1$$

pour tout n et donc, par continuité décroissante de P, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)=1$*, ce qui montre* $(p1)$.

Il reste donc à montrer que $\lim_{m\to\infty} b_{n,m} = 0$. *Pour cela, on remarque que, si* $b_{n,m} \ne 0$, *on a*

$$\ln(b_{n,m}) = \sum_{k=n}^{m} \ln(\mathrm{P}(\mathrm{A}^c_{k,1})) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}_{k,1})).$$

Comme $\ln(1-u) \le -u$ *pour* $u \in [0,1[$, *on en déduit*

$$\ln(b_{n,m}) \le -\sum_{k=n}^{m} \mathrm{P}(\mathrm{A}_{k,1}) \le -\sum_{k=n}^{m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\ln(k)}} \frac{1}{k},$$

et donc $\ln(b_{n,m}) \to -\infty$ *quand* $m \to \infty$ *car la série de terme général* $1/(k\sqrt{\ln(k)})$ *est divergente. On a donc finalement* $\lim_{m\to\infty} b_{n,m} = 0$ *ce qui termine la démonstration de* $(p1)$ *(et termine l'exercice).*

Exercice 4.53 (Sur la somme de v.a.r.i.i.d. intégrables) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r.i.i.d. et N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{S_N} = \mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X_N}$ (c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $\mathrm{S_N}(\omega) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_n(\omega)$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{A}_n = \{\omega \in \Omega, \mathrm{N}(w) = n\}$.

1. On suppose, dans cette question, que les v.a.r. $\mathrm{N}, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots$ sont indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{Y}_n = \sum_{p=1}^{n} \mathrm{X}_p$ et $\mathrm{Z}_n = \sum_{p=1}^{n} |\mathrm{X}_p|$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1_{A_n} et Y_n sont des v.a.r. indépendantes et que 1_{A_n} et Z_n sont des v.a.r. indépendantes. [On pourra utiliser la proposition 3.30.]

Corrigé – *On utilise la proposition 3.30. Comme fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *on choisit* $\varphi = 1_{\{n\}}$ *et comme fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *on choisit* $\psi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^n x_i$. *La proposition 3.30 donne alors que* $\varphi(\mathrm{N})$ *et* $\psi(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ *sont des v.a.r. indépendantes. Ceci montre que* 1_{A_n} *et* Y_n *sont indépendantes car* $\varphi(\mathrm{N}) = 1_{\mathrm{A}_n}$ *et* $\psi(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) = \mathrm{Y}_n$.

En prenant maintenant $\psi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^n |x_i|$, *on montre aussi que* 1_{A_n} *et* Z_n *sont indépendantes.*

(b) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $\mathrm{E}(\mathrm{S}_\mathrm{N})$ en fonction de $\mathrm{E}(\mathrm{N})$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$. [On pourra remarquer que $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum_{n=1}^\infty 1_{\mathrm{A}_n}\mathrm{Y}_n$ et $|\mathrm{S}_\mathrm{N}| \le \sum_{n=1}^\infty 1_{\mathrm{A}_n}\mathrm{Z}_n$.]

Corrigé – S_N *est bien une v.a.r. (*S_N *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et est mesurable comme limite de fonctions mesurables). Comme* $|\mathrm{S}_\mathrm{N}| \le \sum_{n=1}^\infty 1_{\mathrm{A}_n}\mathrm{Z}_n$, *on a grâce a l'indépendance de* 1_{A_n} *et* Z_n *(et le théorème de convergence monotone)*

$$\mathrm{E}(|\mathrm{S}_\mathrm{N}|) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(1_{\mathrm{A}_n})\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{P}(\mathrm{N}=n)\mathrm{E}(|\mathrm{X}_1|) = \mathrm{E}(\mathrm{N})\mathrm{E}(|\mathrm{X}_1|).$$

Ceci prouve que S_N *est intégrable. Cela prouve aussi que la série de terme général* $1_{\mathrm{A}_n}\mathrm{Y}_n$ *est absolument convergente dans* $\mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$. *Cette série est donc aussi convergente dans le même espace et on obtient ainsi (grâce a l'indépendance de* 1_{A_n} *et* Y_n*)*

$$\mathrm{E}(\mathrm{S}_\mathrm{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(1_{\mathrm{A}_n})\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{P}(\mathrm{N}=n)\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = \mathrm{E}(\mathrm{N})\mathrm{E}(\mathrm{X}_1).$$

2. On suppose maintenant que $\mathrm{A}_n \in \sigma(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (où $\sigma(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ est la tribu engendrée par $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$).

(a) Montrer que $1_{\{n\le \mathrm{N}\}}$ et X_n sont des v.a.r. indépendantes.

Corrigé – *On pose* $\mathrm{B}_n = \{\mathrm{N} \ge n\}$. *On a donc* $\mathrm{B}_n^c = \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k$. *Comme* $\mathrm{A}_k \in \sigma(\mathrm{X}_k) \subset \sigma(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{n-1})$ *pour* $1 \le k \le n-1$, *on a donc* $\mathrm{B}_n \in \sigma(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{n-1})$ *et donc* $\sigma(1_{\mathrm{B}_n}) \subset \sigma(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{n-1})$.

Enfin, comme $\sigma(\mathrm{X}_1),\ldots,\sigma(\mathrm{X}_n)$ *sont des tribus indépendantes, la proposition 2.59 donne l'indépendance de* $\sigma(\mathrm{X}_n)$ *et* $\sigma(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{n-1})$. *On a donc l'indépendance de* $\sigma(\mathrm{X}_n)$ *et* $\sigma(1_{\mathrm{B}_n})$, *c'est-à-dire l'indépendance de* X_n *et* 1_{B_n}.

(b) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $\mathrm{E}(\mathrm{S}_\mathrm{N})$ en fonction de $\mathrm{E}(\mathrm{N})$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$. [On pourra écrire $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum_{n=1}^\infty 1_{\{n\le\mathrm{N}\}}\mathrm{X}_n$.]

Corrigé – *On reprend la démonstration de la question 1(b). On a*

$$|\mathrm{S}_\mathrm{N}|) \le \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{n\le\mathrm{N}\}}|\mathrm{X}_n|.$$

Avec le théorème de convergence monotone et l'indépendance de $1_{\{n \le N\}}$ *et* $|X_n|$, *on a donc*

$$E(|S_N|) \le \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{\{n\le N\}})E(|X_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{n \le N\})E(|X_1|) = E(N)E(|X_1|),$$

car $\sum_{n=1}^{\infty} P(\{n \le N\}) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N = k) = E(N)$. *Comme à la question 1(b), ceci montre que* S_N *est intégrale et que la série de terme générale* $1_{\{n\le N\}}X_n$ *est absolument convergente (et donc convergente) dans* $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *On obtient ainsi*

$$E(S_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{\{n\le N\}})E(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{n \le N\})E(X_1) = E(N)E(X_1).$$

Exercice 4.54 (Dés pipés) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes, bornées et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y).$$

Corrigé – *Comme* X *et* Y *sont des v.a.r. indépendantes, on a* $E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y))$ *pour toutes fonctions* φ *et* ψ *boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On peut alors choisir* φ *et* ψ *t.q.*

$$\varphi(s) = \psi(s) = t^s \text{ si } s \in \mathrm{Im}(X) \cup \mathrm{Im}(Y) \cup \mathrm{Im}(X+Y)$$

et, par exemple, $\varphi(s) = \psi(s) = 0$ *si* $s \notin \mathrm{Im}(X) \cup \mathrm{Im}(Y) \cup \mathrm{Im}(X+Y)$ *(la fonction* φ *est bien borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*). On obtient alors pour tout* $\omega \in \Omega$,

$$\varphi(X(\omega)) = t^{X(\omega)},\ \psi(Y(\omega)) = t^{Y(\omega)} \text{ et } \varphi(X(\omega))\psi(Y(\omega)) = t^{X(\omega)}t^{Y(\omega)} = t^{X(\omega)+Y(\omega)}.$$

On en déduit que

$$E(t^{X+Y}) = E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y)) = E(t^X)E(t^Y).$$

2. On suppose maintenant que $\mathrm{Im}(X) = \mathrm{Im}(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et que $P(\{X = i\}) = p_i > 0$, $P(\{Y = i\}) = q_i > 0$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   On pose $P(\{X + Y = i\}) = r_i$ pour $i = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

   Montrer qu'il est impossible que r_i soit indépendant de i (c'est-à-dire $r_i = 1/11$ pour tout i entre 2 et 12). [On pourra raisonner par l'absurde et montrer que si $r_i = 1/11$ pour tout i entre 2 et 12, on a alors $(1 - t^{11}) = 11(1 - t)(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1}t^i)(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1}t^i)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible...]

Corrigé – *Comme* $X + Y$ *ne peut prendre que des valeurs entières comprises entre 1 et 12, on a bien sûr* $\sum_{i=2}^{12} r_i = 1$. *On suppose que* r_i *ne dépend pas de* i *(quand* $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$*). On a donc* $r_i = 1/11$ *pour tout* $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. *On utilise alors la première question. Soit* $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$, *on a*

$$E(t^{X+Y}) = \sum_{i=2}^{12} r_i t^i = \sum_{i=2}^{12} \frac{1}{11} t^i = \frac{t^2}{11} \sum_{i=0}^{10} t^i = \frac{t^2(1 - t^{11})}{11(1 - t)},$$

$$E(t^X) = \sum_{i=1}^{6} p_i t^i = t \sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i, \qquad E(t^Y) = \sum_{i=1}^{6} q_i t^i = t \sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i.$$

La première question donne alors

$$(1 - t^{11}) = 11(1 - t)(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i)(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i). \tag{4.79}$$

On a démontré (4.79) pour tout $t \neq 1$, *mais elle aussi trivialement vraie pour* $t = 1$. *On a donc bien (4.79) pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

L'égalité (4.79) donne l'égalité de deux polynômes (de degré 11*) sur* $\mathbb{R}$. *Mais, cette égalité est impossible. En effet, le polynôme au membre de gauche ne s'annule (dans* $\mathbb{R}$*) que pour* $t = 1$. *Or,* $\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i$ *est un polynôme de degré impair, il s'annule donc au moins une fois dans* $\mathbb{R}$. *On note* t_0 *un nombre réel annulant ce polynôme. On a* $t_0 \neq 1$ *car* $\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} = 1$. *L'égalité (4.79) est donc impossible au point* t_0.