Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

MASTER 1 MATHEMATIQUES – INFORMATIQUE MATHEMATIQUES GENERALES M1...

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
1	**M1, UE 1.3**	**MIMA-SMAAU11T**	**3**

Nom de l'UE : Mesure, Intégration, Probabilités

Le cours est essentiellement tiré d'un livre disponible sur la page web indiquée ci dessous. Pour chaque semaine, il est proposé d'étudier une partie du cours et de faire des exercices (corrigés).
Deux devoirs sont à rendre afin de bénéficier d'une note de contrôle continu.
note finale=max(note-examen, 1/3(2 note-examen + note-contrôle-continu)).

- Contenu de l'envoi : Cours : Chapitres 5 et 6, Exercices, Devoir 1

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 (Intégrale sur B(R)), espace Lp) :
Etudier le chapitre 5 (intégrale sur B(R)) et le paragraphe 6.1 (espace Lp)
Exercices proposés (avec corrigés) : 5.6, 5.14, 6.18, 6.20, 6.27

Semaine 2 (Espace L2, dualité) :
Etudier le paragraphe 6.2 (espace L2) et 6.3 (dualité dans Lp)
Exercices proposés (avec corrigés) : 6.36, 6.44, 6.45, 6.49

Semaine 3 (Convergence faible, faible*, étroite, en loi) :
Etudier le paragraphes 6.4.1 et 6.4.2 (convergence faible, faible*, étroite, en loi)
Exercices proposés (avec corrigés) : 6.52, 6.59, 6.65

Semaine 4 (Loi des grands nombres) :
Etudier le paragraphes 6.4.3 (loi des grands nombres)
Exercices proposés (avec corrigés) : 6.66, 6.67, 6.68 , 6.69
Pendant les 4 semaines, faire le devoir 1

-Coordonnées des enseignants responsables de l'envoi
E. Hillion et T. Gallouet, CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr, erwan.hillion@univ-amu.fr
Vous pouvez aussi consulter la page web:
http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d/mip.d
et nous poser des questions par le forum d'ametice ou par email

Chapitre 5

Intégrale sur les boréliens de $\mathbb{R}$

5.1 Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues

Nous commençons par comparer l'intégrale de Lebesgue (définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) à l'intégrale classique des fonctions continues (et plus généralement des fonctions réglées).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non). On rappelle que $\mathcal{B}(\mathrm{I}) = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mathrm{A} \subset \mathrm{I}\}$. On peut donc considérer la restriction à $\mathcal{B}(\mathrm{I})$ de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On notera en général (un peu incorrectement) aussi λ cette mesure sur $\mathcal{B}(\mathrm{I})$.

Proposition 5.1 *Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $f \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R})$.*

Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$ et $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1).

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 4.5 page 213. En fait l'exercice 4.5 s'intéresse au cas $[0,1]$ mais s'adapte facilement pour le cas général $[a,b]$. ■

Remarque 5.2

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (I peut être fermé ou ouvert en a et b) et si $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}, \mathcal{B}(\mathrm{I}), \lambda)$ ou $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathcal{B}(\mathrm{I}), \lambda)$, on notera souvent :

$$\int f d\lambda = \int f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

Cette notation est justifiée par la proposition précédente (proposition 5.1) car, si I est compact, l'intégrale de Lebesgue contient l'intégrale des fonctions continues (et aussi l'intégrale des fonctions réglées et aussi l'intégrale de Riemann, voir l'exercice 5.2).

2. Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.

   La proposition 5.1 donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$. En fait, on écrira souvent que $f \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$, c'est-à-dire qu'on confondra f avec sa classe dans $L^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda)$, qui est l'ensemble $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)\,;\ g = f$ p.p.$\}$. On peut d'ailleurs noter que f est alors le seul élément continu de $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda)\,;\ g = f$ p.p.$\}$ comme le montre la proposition suivante (proposition 5.3).

Proposition 5.3 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de longueur strictement positive et* $f,g \in C(I,\mathbb{R})$. *On suppose que* $f = g$ λ*-p.p.. On a alors* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in I$.

Cette proposition est démontrée à l'exercice (corrigé) 3.11 page 140 pour $I = \mathbb{R}$. La démonstration pour I quelconque est similaire.

Proposition 5.4 *Soit* $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *(c'est-à-dire que* f *est une fonction continue à support compact). Alors* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. *(Ici aussi, on écrira souvent* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.*)*

De plus, si $a,b \in \mathbb{R}$ *sont t.q.* $a < b$ *et* $f = 0$ *sur* $[a,b]^c$ *(de tels a et b existent). Alors,* $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ *(cette dernière intégrale étant à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1).*

DÉMONSTRATION – On remarque d'abord que f est borélienne car continue. Puis, pour montrer que f est intégrable, on utilise la proposition 5.1. Comme f est à support compact, il existe $a,b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a,b]^c$. On a alors, par la proposition 5.1,

$$f_{|[a,b]} \in C([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda).$$

On a donc $\int |f| d\lambda = \int |f_{|[a,b]}| d\lambda < \infty$ et donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Enfin, la proposition 5.1 donne aussi :

$$\int f_{|[a,b]} d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

D'où l'on conclut bien que $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$. ∎

Le résultat précédent se généralise à l'intégrale de Riemann des fonctions Riemann-intégrables (construite à partir des sommes de Darboux). Ceci fait l'objet de l'exercice 5.2.

5.2 Mesures abstraites et mesures de Radon

Remarque 5.5 Les propositions 5.1 et 5.4 donnent les résultats suivants :

1. Pour $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive, c'est-à-dire que $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$. (On rappelle que $f \geq 0$ signifie que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

   Plus généralement, soit m une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, finie sur les compacts. Il est facile de voir que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$). Pour $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une forme linéaire positive).

   On peut montrer une réciproque de ce résultat (théorème 5.6).

2. Soit $-\infty < a < b < \infty$. Pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive.

   Ici aussi, plus généralement, soit m une mesure finie sur $([a,b],\mathcal{B}([a,b]))$. Il est facile de voir que $C([a,b],\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),m)$ (ou plutôt $C([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),m)$). Pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une forme linéaire positive).

   Ici aussi, on peut montrer une réciproque de ce résultat (voir la remarque 5.15).

On énonce maintenant des résultats, dus à F. Riesz, qui font le lien entre les applications linéaires (continues ou positives) sur des espaces de fonctions continues (applications que nous appellerons mesures de Radon) et les mesures abstraites sur $\mathcal{B}(R)$ (c'est-à-dire les applications $\sigma-$additives sur les boréliens de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$, non identiquement égales à $+\infty$). Le théorème 5.6 donné ci après est parfois appelé "Théorème de représentation de Riesz en théorie de la mesure". Dans ce livre, nous réservons l'appellation "Théorème de représentation de Riesz" pour le théorème 6.56 de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert.

Théorème 5.6 (Riesz) *Soit* L *une forme linéaire positive sur* $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, c'est-à-dire une application linéaire positive de* $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors il existe une unique mesure* m *sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q. :*

$$\forall\ f \in C_c,\ L(f) = \int f dm.$$

De plus, m *est finie sur les compacts (c'est-à-dire* $m(K) < +\infty$ *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}$*.)*

Proposition 5.8 *Soit $d \geq 1$, m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, finies sur les compacts. On suppose que $\int f dm = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors $m = \mu$.*

La démonstration de cette proposition peut se faire en utilisant la proposition 2.31. Elle est faite pour $d = 1$ au chapitre 4 (proposition 4.60). Sa généralisation au cas $d > 1$ est laissée en exercice.

Remarque 5.9 Le théorème 5.6 donne un autre moyen de construire la mesure de Lebesgue que celui vu au chapitre 2 :

Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int_a^b f(x)dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis pour que $f = 0$ sur $[a,b]^c$ (on utilise ici l'intégrale des fonctions continues sur un compact de $\mathbb{R}$). L'application L est clairement linéaire positive de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème 5.6 donne donc l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\int f dm = L(f)$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette mesure est justement la mesure de Lebesgue (elle vérifie bien $m(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Définition 5.10 *On définit les espaces de fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivants :*

$$C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\},$$
$$C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(x) \to 0 \textit{ quand } |x| \to +\infty\},$$
$$C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \exists K \subset \mathbb{R}, K \textit{ compact, } f = 0 \textit{ sur } K^c\}.$$

Pour $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. La norme $\|\cdot\|_u$ s'appelle norme de la convergence uniforme (elle est aussi parfois appelée norme infinie.)

Il est clair que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des espaces de Banach (e.v.n. complet) avec la norme $\|\cdot\|_u$. Ces espaces seront parfois notés, en abrégé, C_c, C_0 et C_b.

Remarque 5.11 Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_b \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$). Pour $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est alors une application linéaire sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On munit $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, L'application L est alors continue (car $L(f) \leq m(\mathbb{R})\|f\|_u$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). L'application L est aussi positive, c'est-à-dire que $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$. On donne ci-après des réciproques partielles de ces résultats.

5.3 Changement de variable, densité et continuité

On montre dans cette section quelques propriétés importantes de l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et éventuellement de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ si μ est finie sur les compacts).

Proposition 5.19 (Changement de variable affine) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On définit*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ par } g(x) = f(\alpha x + \beta) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|}\int f d\lambda.$$

Le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{L}^1$ par L^1.

DÉMONSTRATION – 1. On pose $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $g = f \circ \varphi$. Comme f et φ sont boréliennes (noter que φ est même continue), g est aussi borélienne, c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}$.

2. Pour montrer que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|}\int f d\lambda, \tag{5.4}$$

on raisonne en plusieurs étapes :

(a) On suppose que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) < +\infty$. On a alors $g = 1_{\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}}$ (avec $\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha} = \{\frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}, x \in A\}$). On a donc $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et (5.4) est vraie (car on a déjà vu que $\lambda(\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda(A)$, dans la proposition 2.48).

(b) On suppose que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.
Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, on a aussi $\lambda(A_i) < +\infty$ pour tout i. On conclut alors que $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\frac{1}{\alpha}A_i - \frac{\beta}{\alpha}}$, ce qui donne que $g \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et que (5.4) est vraie.

(c) On suppose que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a donc $\int f_n d\lambda \uparrow \int f d\lambda$ quand $n \to +\infty$. On définit g_n par $g_n(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$g_n \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),\ g_n \uparrow g \text{ et } \int g_n d\lambda \uparrow \int g d\lambda \text{ quand } n \to +\infty.$$

Comme (5.4) est vraie pour $f = f_n$ et $g = g_n$, on en déduit que $g \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.4) est vraie.

(d) On suppose enfin seulement que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Comme

$$f = f^+ - f^-, \text{ avec } f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),$$

on peut utiliser l'étape précédente avec $f^\pm$ et on obtient que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et que (5.4) est vraie.

3. Le résultat obtenu est encore vrai pour L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$. Il suffit de remarquer que
$$f_1 = f_2 \text{ p.p. } \Rightarrow g_1 = g_2 \text{ p.p. , avec } g_i(\cdot) = f_i(\alpha\cdot+\beta),\ i = 1,2.$$
En fait, lorsque f décrit un élément de L^1 (qui est un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}^1$), la fonction $g(\alpha\cdot+\beta)$ décrit alors un élément de L^1.

■

Le résultat de densité que nous énonçons à présent permet d'approcher une fonction de $L^1_R(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ aussi près que l'on veut par une fonction continue à support compact. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer certaines propriétés des fonctions de L^1 : on montre la propriété pour les fonctions continues, ce qui s'avère en général plus facile, et on passe à la limite.

Théorème 5.20 (Densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$) *On note* $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. *L'ensemble* $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *à support compact, est dense dans* L^1*, c'est-à-dire :*
$$\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R});\ \|f-\varphi\|_1 < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – On a déjà vu que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1$. En toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1 \le \varepsilon$. On va raisonner une nouvelle fois en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^1$).

Etape 1. On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ est une mesure régulière (proposition 2.43), il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O\setminus F) \le \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = F \cap [-n,n]$, de sorte que F_n est compact (pour tout n) et $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. La continuité croissante de λ donne alors $\lambda(F_n) \uparrow \lambda(F)$, quand $n \to +\infty$. Comme $\lambda(F) \le \lambda(A) < +\infty$, on a aussi $\lambda(F\setminus F_n) = \lambda(F) - \lambda(F_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_0 tel que $\lambda(F\setminus F_{n_0}) \le \varepsilon$.

On pose $K = F_{n_0}$ et on obtient donc $K \subset F \subset A \subset O$, ce qui donne
$$\lambda(O\setminus K) \le \lambda(O\setminus F) + \lambda(F\setminus K) \le 2\varepsilon.$$
On a donc trouvé un compact K et un ouvert O tels que $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O\setminus K) \le 2\varepsilon$. Ceci va nous permettre de construire $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1 \le 2\varepsilon$.

On pose
$$d = d(K,O^c) = \inf\{d(x,y), x \in K, y \in O^c\}.$$
Montrons que $d > 0$; par caractérisation de l'infimum, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O^c$ telles que
$$d(x_n,y_n) = |x_n - y_n| \to d \text{ quand } n \to +\infty.$$
Par compacité de K, on peut supposer (après extraction éventuelle d'une sous-suite) que $x_n \to x$, quand $n \to +\infty$. Si $d = 0$, on a alors aussi $y_n \to x$ quand $n \to +\infty$ et

donc $x \in O^c \cap K$ (car K et O^c sont fermés), ce qui est impossible puisque $K \subset A \subset O$ et donc $O^c \cap K = \emptyset$. On a donc bien montré $d > 0$.

On définit maintenant la fonction φ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{d}(d - d(x,K))^+ \text{ avec } d(x,K) = \inf\{d(x,y),\, y \in K\}.$$

La fonction φ est continue car $x \mapsto d(x,K)$ est continue (cette fonction est même lipschitzienne, on peut montrer que $|d(x,K) - d(y,K)| \le |x-y|$). Elle est à support compact car il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$ et on remarque alors que $\varphi = 0$ sur $[-A-d, A+d]^c$. On a donc $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \le \varphi \le 1$ (partout). On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \le |f - \varphi| \le 1$, ce qui donne

$$\|f-\varphi\|_1 \le \lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Etape 2. On suppose ici que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ tels que $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, on a aussi $\lambda(A_i) < +\infty$ pour tout i.

Soit $\varepsilon > 0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|1_{A_i} - \varphi_i\|_1 \le \varepsilon$. On pose

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

et on obtient

$$\|f-\varphi\|_1 \le (\sum_{i=1}^n a_i)\varepsilon$$

(ce qui est bien arbitrairement petit).

Etape 3. On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+$ (lemme 4.9), il existe $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \le f$ et

$$\int f d\lambda - \varepsilon \le \int g dm \le \int f dm,$$

de sorte que

$$\|g - f\|_1 = \int (f-g) d\lambda \le \varepsilon,$$

L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|g - \varphi\|_1 \le \varepsilon$. D'où l'on déduit

$$\|f-\varphi\|_1 \le 2\varepsilon,$$

ce qui termine l'étape 3.

Etape 4. On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^1$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\|f^+ - \varphi_1\|_1 \le \varepsilon \text{ et } \|f^- - \varphi_2\|_1 \le \varepsilon.$$

On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\|f-\varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve bien la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^1. ∎

Le résultat de densité que nous venons de démontrer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. Enfin, il n'est pas limité à $\mathbb{R}$, il est également vrai dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Tout ceci est montré dans l'exercice 7.16. Par contre, le résultat de continuité en moyenne que nous montrons maintenant n'est pas vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (voir l'exercice 7.16).

Théorème 5.21 (Continuité en moyenne) *Soient $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit f_h (translatée de f) par : $f_h(x) = f(x+h)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\|f_h - f\|_1 = \int |f(x+h) - f(x)| dx \to 0 \text{ lorsque } h \to 0. \tag{5.5}$$

Démonstration – Soient $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On remarque que $f_h = f(\cdot + h) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (d'après la proposition 5.19). D'autre part $f = g$ p.p. implique $f_h = g_h$ p.p.. On peut donc définir f_h comme élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

La démonstration de (5.5) fait l'objet de l'exercice 5.10. ∎

Exercice 5.6 (Intégrabilité et limite à l'infini) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$. Montrer que cette limite est nulle.

   Corrigé – *On pose $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ et on suppose $l \neq 0$. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \geq \frac{|l|}{2}$ pour tout $x > a$. On en déduit, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,*
$$\int |f| d\lambda \geq \int_{]a,+\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = +\infty,$$
   en contradiction avec l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^1$.

2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

   Corrigé –
   La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n par :
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq n - \frac{1}{n^2}, \\ n^2(x - n + \frac{1}{n^2}) & si\ n - \frac{1}{n^2} < x \leq n, \\ -n^2(x - n - \frac{1}{n^2}) & si\ n < x \leq n + \frac{1}{n^2}, \\ 0 & si\ x > n + \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$
   Puis, on pose $f(x) = \sum_{n\geq 2} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

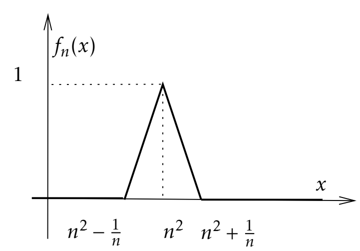

FIGURE 5.1 – La fonction f_n

   la série définissant $f(x)$ a au plus un terme non nul. Plus précisément, il existe n (dépendant de x) tel que $f = f_n$ dans un voisinage de x. On en déduit que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que f est continue (car les f_n sont continues). Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$ pour tout n, le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et
$$\int f dm = \sum_{n\geq 2} \int f_n dm = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$
   On a donc $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f(x) \not\to 0$ quand $x \to +\infty$ car $f_n(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. On suppose que f est uniformément continue. A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
[On pourra commencer par montrer que, pour tout $\eta > 0$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.]$$

Corrigé – *On commence par montrer le résultat préliminaire suggéré.*
Soient $\eta > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite telle que. $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On pose $f_n = |f| 1_{]x_n-\eta, x_n+\eta[}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$ (on a même $f_n(x) = 0$ pour n tel que $x_n - \eta > x$). On a aussi $|f_n| \le |f| \in \mathcal{L}^1$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition préliminaire 4.29). Il donne que $\int f_n dm \to 0$, c'est-à-dire :

$$\int |f| 1_{]x_n-\eta, x_n+\eta[} d\lambda \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{5.13}$$

On montre maintenant que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(x) \not\to 0$ quand $x \to +\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $|f(x_n)| \ge \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La continuité uniforme de f donne l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|f(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n - \eta, x_n + \eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int |f| 1_{]x_n-\eta, x_n+\eta[} d\lambda \ge \varepsilon\eta > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec (5.13).

On a donc bien finalement montré que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

4. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Corrigé – *Comme $f \in C^1$, on a, pour $y > x$, $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_{]x,y[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, l'exercice 5.5 donne que f est uniformément continue. La question précédente donne alors que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).*

Une autre démonstration possible est : Comme $f \in C^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_{]0,x[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, on en déduit que $f(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to +\infty$. En effet, le théorème de convergence dominée donne que $\int_{]0,x[} f' d\lambda \to \int_{]0,+\infty[} f' d\lambda$ (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to +\infty$. Enfin, la première question donne que la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ est nécessairement 0 (et ici aussi, c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Exercice 5.14 (Convergence vague et convergence étroite) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ($d \geq 1$) et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

- $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
- $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to +\infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]

Corrigé – *Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on définit ρ_p par $\rho_p(x) = p^d\rho(px)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_p(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1/p$. La suite $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ s'appelle suite régularisante (ou suite de noyaux régularisants).*

Soit $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on définit la suite $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ en posant $\psi_p(x) = \int \psi(y)\rho_p(x-y)dy$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Comme ρ_p et ψ sont des fonctions à support compact, il est clair que ψ_p est aussi une fonction à support compact. Grâce au théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 4.53), il est assez facile de voir que ψ_p est indéfiniment dérivable. On a donc $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Enfin, du fait que ψ est uniformément continue, on déduit que ψ_p converge uniformément (sur $\mathbb{R}^d$) vers ψ quand $p \to +\infty$. Plus précisément, en notant $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\|\psi_p - \psi\|_u \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d, |z|\leq 1/p} \|\psi(\cdot + z) - \psi\|_u,$$

dont on déduit bien $\|\psi_p - \psi\|_u \to 0$ quand $p \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On remarque maintenant que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \psi dm_n - \int \psi dm = \int (\psi - \psi_p)dm_n + \int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm + \int (\psi_p - \psi)dm,$$

on a donc

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \|\psi_p - \psi\|_u (\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d)) \\ + |\int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm|.$$

Comme $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d) < +\infty$ (car $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$), il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \varepsilon + |\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm|.$$

Comme $\psi_{p_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la première hypothèse sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne qu'il existe n_0 t.q. $n \geq n_0$ implique $|\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm| \leq \varepsilon$. On a donc finalement

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\int \psi dm_n \to \int \psi dm$, *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \le \varphi_p \le 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \le \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ dans les questions suivantes.

Corrigé – *Il suffit de prendre* φ_p *définie ainsi :*

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_p, \\ \varphi_p(x) = p + 1 - |x| & \text{si } x \in B_{p+1} \setminus B_p, \\ \varphi_p(x) = 0 & \text{si } x \notin B_{p+1}. \end{cases}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p \ge p_0 \Rightarrow \int (1 - \varphi_p) dm \le \varepsilon$.

Corrigé – *On utilise ici le théorème de convergence dominée, la suite* $(1-\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *converge p.p. vers* 0 *et est dominée par la fonction constante et égale à 1 (qui est bien une fonction intégrable pour la mesure m). On a donc* $\lim_{p\to+\infty} \int (1 - \varphi_p) dm = 0$, *ce qui donne le résultat demandé.*

(b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\int (1 - \varphi_p) dm_n \to \int (1 - \varphi_p) dm$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On a* $\int (1-\varphi_p) dm_n = m_n(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm_n$. *Comme* $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, *on a* $\int \varphi_p dm_n \to \int \varphi_p dm$ *(quand* $n \to +\infty$*). D'autre part, on a* $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$. *On a donc finalement, quand* $n \to +\infty$,

$$\int (1 - \varphi_p) dm_n \to m(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm = \int (1 - \varphi_p) dm.$$

(c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \in \mathbb{N}$, $p \ge p_1 \Rightarrow \int (1 - \varphi_p) dm_n \le \varepsilon$.

Corrigé – *D'après a), il existe* p_2 *tel que* $\int (1 - \varphi_{p_2}) dm \le \varepsilon/2$. *D'après b), il existe* n_0 *tel que*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int (1 - \varphi_{p_2}) dm_n \le \int (1 - \varphi_{p_2}) dm + \varepsilon/2.$$

On a donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int (1 - \varphi_{p_2}) dm_n \le \varepsilon.$$

Comme $(1 - \varphi_p) \le (1 - \varphi_{p_2})$ *si* $p \ge p_2$, *on a aussi*

$$n \ge n_0,\ p \ge p_2 \Rightarrow \int (1 - \varphi_p) dm_n \le \varepsilon.$$

Chapitre 6

Les espaces L^p

6.1 Définitions et premières propriétés

6.1.1 Les espaces L^p, avec $1 \le p < +\infty$

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \le p < +\infty$ et $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(E, T)$ (c'est-à-dire $f : E \to \mathbb{R}$, mesurable). On remarque que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$, car $|f|^p = \varphi \circ f$ où φ est la fonction continue (donc borélienne) définie par $\varphi(s) = |s|^p$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. (Noter que $p > 0$ et on rappelle que $|s|^p = e^{p \ln(|s|)}$ pour $s \neq 0$ et $|s|^p = 0$ pour $s = 0$.) La quantité $\int |f|^p dm$ est donc bien définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci va nous permette de définir les espaces de fonctions de puissance p–ième intégrable. On retrouve, pour $p = 1$, la définition de l'espace des fonctions intégrables.

Définition 6.1 (Les espaces $\mathcal{L}^p$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $1 \le p < +\infty$ *et* f *une fonction définie de* E *dans* $\mathbb{R}$*, mesurable. (On a donc* $|f|^p \in \mathcal{M}_+$*.)*

1. On dit que $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *si* $\int |f|^p dm < +\infty$*. On pose alors :*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. On dit que $f \notin \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *si* $\int |f|^p dm = +\infty$ *et on pose alors* $\|f\|_p = +\infty$*.*

De manière analogue au cas $p = 1$ on quotiente les espaces $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence "= p.p." afin que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d'équivalence (voir section 4.5).

Définition 6.2 (Les espaces L^p) *Soient* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et* $1 \le p < +\infty$.

1. *On définit l'espace* $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de* $\mathcal{L}^p$ *pour la relation d'équivalence* $(= pp)$. *En l'absence d'ambiguïté on notera* L^p *l'espace* $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.
2. *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. *On pose* $\|\mathrm{F}\|_p = \|f\|_p$ *si* $f \in \mathrm{F}$. *(Cette définition est cohérente car ne dépend pas du choix de* f *dans* F. *On rappelle aussi que* $\mathrm{F} = \tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^p\,;\ g = f \text{ p.p.}\}$.*)*

Proposition 6.3 *Soient* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et* $1 \le p < +\infty$. *Alors :*

1. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.
2. $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION – 1. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^p$. On a $\alpha f \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et $\int |\alpha f|^p dm = |\alpha|^p \int |f|^p dm < +\infty$. Donc, $\alpha f \in \mathcal{L}^p$.

— Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$. On veut montrer que $f + g \in \mathcal{L}^p$. On sait que $f + g \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et on remarque que, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$|f(x) + g(x)|^p \le 2^p |f(x)|^p + 2^p |g(x)|^p,$$

et donc

$$\int |f+g|^p dm \le 2^p \int |f|^p dm + 2^p \int |g|^p dm < +\infty,$$

ce qui montre que $f + g \in \mathcal{L}^p$.

2. La structure vectorielle de L^p s'obtient comme pour $p = 1$. Soit $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathrm{L}^p$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ et on définit $\alpha\mathrm{F} + \beta\mathrm{G}$ comme étant la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$. Comme d'habitude, cette définition est cohérente car la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$ ne dépend pas des choix de f et g dans F et G.

■

On va montrer maintenant que $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^p$ et une norme sur L^p.

Lemme 6.4 (Inégalité de Young) *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q \in\ ]1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors :*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

DÉMONSTRATION – La fonction exponentielle $\theta \mapsto \exp(\theta)$ est convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a donc, pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\exp(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \leq t\exp(\theta_1) + (1-t)\exp(\theta_2).$$

Soit $a, b > 0$ (les autres cas sont triviaux). On prend $t = \frac{1}{p}$ (de sorte que $(1-t) = \frac{1}{q}$), $\theta_1 = p\ln(a)$ et $\theta_2 = q\ln(b)$. On obtient bien $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. ■

Lemme 6.5 (Inégalité de Hölder) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $p, q \in]1, +\infty[$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Soient* $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. *Alors,* $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.1}$$

Le même résultat est vrai avec L^p, L^q *et* L^1 *au lieu de* $\mathcal{L}^p$, $\mathcal{L}^q$ *et* $\mathcal{L}^1$.

DÉMONSTRATION – On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$ car $f, g \in \mathcal{M}$ (voir la proposition 3.19).

L'inégalité de Young donne $|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On en déduit, en intégrant :

$$\int |fg| dm \leq \frac{1}{p} \int |f|^p dm + \frac{1}{q} \int |g|^q dm < +\infty. \tag{6.2}$$

Donc, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Pour montrer (6.1), on distingue maintenant 3 cas :

Cas 1. On suppose $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$. On a alors $f = 0$ p.p. ou $g = 0$ p.p.. On en déduit $fg = 0$ p.p., donc $\|fg\|_1 = 0$ et (6.1) est vraie.

Cas 2. On suppose $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. On a alors, avec (6.2),

$$\|fg\|_1 = \int |fg| dm \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

L'inégalité (6.1) est donc vraie.

Cas 3. On suppose $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. On pose alors $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$, de sorte que $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$. Le cas 2 donne alors

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \|f_1 g_1\|_{\leq} 1.$$

Ce qui donne (6.1).

Dans le cas où $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$, on confond les classes f et g avec des représentants, encore notés f et g. Le résultat précédent donne $fg \in \mathcal{L}^1$ et (6.1). On a alors $fg \in \mathrm{L}^1$ au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire "il existe $h \in \mathcal{L}^1$ telle que $fg = h$ p.p." (et fg ne dépend pas des représentants choisis), et (6.1) est vérifiée. ■

Remarquons que dans le cas $p = 2$, l'inégalité de Hölder donne

$$\int fg\, dm \leq \|f\|_2 \|g\|_2,$$

qui est la célèbre inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f, g) \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) \mapsto (f \mid g)_2 = \int fg\, dm$, voir le théorème 6.35. Il est facile de voir que l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité si on prend $f = g$, ou, de manière plus générale, si f et g sont colinéaires. L'inégalité de Hölder devient une égalité si on choisit $g = f^{\frac{1}{q-1}}$, auquel cas $\|f\|_p = \|g\|_q$, voir l'exercice 6.1.

Lemme 6.6 (Inégalité de Minkowski) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$. *Soit* $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. *Alors,* $f + g \in \mathcal{L}^p$ *et :*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{6.3}$$

Le même résultat est vrai avec L^p *au lieu de* $\mathcal{L}^p$.

DÉMONSTRATION – Le cas $p = 1$ à déjà été traité, on suppose donc $p > 1$. On a aussi déjà vu que $f + g \in \mathcal{L}^p$ (proposition 6.3). Il reste donc à montrer (6.3). On peut supposer que $\|f + g\|_p \neq 0$ (sinon (6.3) est trivial).

On remarque que

$$|f + g|^p \leq \mathrm{FH} + \mathrm{GH}, \tag{6.4}$$

avec $\mathrm{F} = |f|$, $\mathrm{G} = |g|$ et $\mathrm{H} = |f + g|^{p-1}$.

On pose $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^p$, $\mathrm{G} \in \mathcal{L}^p$ et $\mathrm{H} \in \mathcal{L}^q$ (car $f + g \in \mathcal{L}^p$). On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder (6.1), elle donne

$$\|\mathrm{FH}\|_1 \leq \|\mathrm{F}\|_p \|\mathrm{H}\|_q,\ \|\mathrm{GH}\|_1 \leq \|\mathrm{G}\|_p \|\mathrm{H}\|_q.$$

On en déduit, avec (6.4),

$$\int |f + g|^p dm \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int |f + g|^p dm)^{1-\frac{1}{p}},$$

D'où l'on déduit (6.3).

Il est clair que le lemme est vrai avec L^p au lieu de $\mathcal{L}^p$. ■

On en déduit la propriété suivante :

Proposition 6.7 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$.

1. *L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}^p$.
2. *L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une norme sur* L^p. L^p, *muni de cette norme, est donc une espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$*) normé.*

DÉMONSTRATION –

— On a bien $\|f\|_p \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^p$.
— On a déjà vu que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}^p$.
— L'inégalité (6.3) donne $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p$.

L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est donc une semi–norme sur $\mathcal{L}^p$. On remarque que, si $f \in \mathcal{L}^p$, on a

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.}.$$

Cette équivalence donne que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p.

■

Remarque 6.8 On reprend ici la remarque 4.40. Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On confondra dans la suite un élément F de L^p avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^p$ telle que $f \in \mathrm{F}$. De manière plus générale, soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ t.q. A^c soit négligeable (c'est-à-dire $\mathrm{A}^c \subset \mathrm{B}$ avec $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$). On dira qu'une fonction f, définie de A dans $\mathbb{R}$, est un élément de L^p s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^p\,;\, h = g \text{ p.p. }\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^p\,;\, h = f \text{ p.p. }\}$.

Avec cette confusion, si f et g sont des éléments de L^p, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Théorème 6.9 (Convergence dominée dans L^p) *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p telle que :*

1. $f_n \to f$ p.p.,

2. $\exists\ \mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ telle que $|f_n| \leq \mathrm{F}$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $f \in \mathrm{L}^p$ et $f_n \to f$ dans L^p (c'est-à-dire $\int |f_n - f|^p dm \to 0$ quand $n \to +\infty$).

Démonstration – On se ramène au cas $p = 1$.

On peut choisir des représentants des f_n (encore notés f_n) de manière à ce que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. On a donc $g \in \mathcal{M}$ et $|g| \leq \mathrm{F}$ p.p., ce qui montre que $g \in \mathcal{L}^p$. On a donc $f \in \mathrm{L}^p$ (au sens $f = g$ p.p. avec $g \in \mathcal{L}^p$).

Puis, on remarque que

$$0 \leq h_n = |f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p \mathrm{F}^p \text{ p.p.},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $h_n \to 0$ p.p. quand $n \to +\infty$. Comme $\mathrm{F}^p \in \mathrm{L}^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne $h_n \to 0$ dans L^1, c'est-à-dire $f_n \to f$ dans L^p. ■

Comme dans le cas $p = 1$ (voir le théorème 4.45), l'hypothèse "$f_n \to f$ p.p." dans le théorème 6.9 peut être remplacée par "$f_n \to f$ en mesure". Ceci est montré dans l'exercice 6.24.

Dans le théorème 6.9, l'hypothèse de domination sur la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (l'hypothèse 2) implique que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^p. La réciproque de cette implication est fausse, c'est-à-dire que le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans L^p ne donne pas l'hypothèse 2 du théorème 6.9. Toutefois, le théorème 6.10 ci-dessous donne un résultat de convergence intéressant sous l'hypothèse "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^p" (on pourrait appeler cette hypothèse domination en norme) au lieu de l'hypothèse 2 du théorème 6.9.

Théorème 6.10 (Convergence "dominée en norme", mesure finie) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré fini (c'est-à-dire* $m(\mathrm{E}) < +\infty$*) et* $1 < p < +\infty$. *On note* L^r *l'espace* $\mathrm{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *(pour tout* $1 \le r < +\infty$*). Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* L^p *telle que :*

1. $f_n \to f$ *p.p.,*

2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* L^p.

Alors, $f \in \mathrm{L}^p$ *et* $f_n \to f$ *dans* L^q *pour tout* $q \in [1, p[$ *(c'est-à-dire* $\displaystyle\int |f_n - f|^q dm \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $1 \le q < p$*).*

Ce théorème est aussi vrai dans le cas $p = +\infty$, *l'espace* L^∞ *sera défini dans la section 6.1.2.*

DÉMONSTRATION – Le fait que $f \in \mathrm{L}^p$ est conséquence immédiate du lemme de Fatou (Lemme 4.19) appliqué à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. Le fait que $f_n \to f$ dans L^q pour tout $q \in [1, p[$ peut se faire avec le théorème de Vitali (théorème 4.51). Ceci est démontré dans l'exercice 6.20. Une généralisation avec $m(\mathrm{E}) = +\infty$ est étudiée dans l'exercice 6.21. ■

On donne maintenant une réciproque partielle au théorème de convergence dominée, comme dans le cas $p = 1$.

Théorème 6.11 (Réciproque partielle de la convergence dominée)

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $1 \le p < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p$ et $f \in \mathrm{L}^p$. On suppose que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to +\infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $f_{n_k} \to f$ p.p. lorsque $k \to +\infty$,
- $\exists$ $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ telle que $|f_{n_k}| \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $k \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – Comme dans le cas $p = 1$, Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.12 (Séries absolument convergentes dans L^p**)**

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $1 \leq p < +\infty$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p$.

On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$. *Alors :*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ *pour presque tout* $x \in \mathrm{E}$. *On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *(la fonction* f *est donc définie p.p.).*
2. $f \in \mathrm{L}^p$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^p$ *telle que* $f = g$ *p.p.").*
3. $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ *p.p. et dans* L^p, *lorsque* $n \to +\infty$. *De plus, il existe* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ *telle que* $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq \mathrm{F}$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n.

On pose, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$. On a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Comme la suite est croissante, il existe $\mathrm{F} \in \mathcal{M}_+$ telle que $g_n \uparrow \mathrm{F}$, quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $g_n^p \uparrow \mathrm{F}^p$ quand $n \to +\infty$ et le théorème de convergence monotone donne

$$\int g_n^p \, dm \to \int \mathrm{F}^p \, dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.5}$$

On remarque maintenant que $\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p = \mathrm{A} < +\infty$. Donc $\|g_n\|_p^p \leq \mathrm{A}^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (6.5) donne alors

$$\int \mathrm{F}^p \, dm \leq \mathrm{A}^p < +\infty. \tag{6.6}$$

L'inégalité (6.6) donne que $\mathrm{F} < +\infty$ p.p.. Il existe donc $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{B}) = 0$ et $\mathrm{F}(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathrm{B}^c$. Pour tout $x \in \mathrm{B}^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est donc absolument convergente dans $\mathbb{R}$. Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$ et on peut définir, pour tout $x \in \mathrm{B}^c$, $f(x) \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

La fonction f n'est pas forcément dans $\mathcal{M}$, mais elle est m-mesurable (voir la définition 4.13 page 180), il existe donc $g \in \mathcal{M}$ telle que $f = g$ p.p.. Puis, comme $|g| \leq \mathrm{F}$ p.p. (car $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq g_n \leq \mathrm{F}$ p.p. et $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to g$ p.p.) on a, grâce à (6.6), $g \in \mathcal{L}^p$, ce qui donne bien $f \in \mathrm{L}^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ telle que $f = g$ p.p.")

Enfin, pour montrer le dernier item de la proposition, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p car $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ p.p. et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq g_n \leq \mathrm{F}$ p.p. avec $\int \mathrm{F}^p \, dm < +\infty$. On obtient bien que $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ dans L^p. ■

Toute série absolument convergente de L^p est donc convergente dans L^p. On en déduit le résultat suivant :

Théorème 6.13 (L'espace L^p est complet) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $1 \le p < +\infty$. *L'espace vectoriel normé* $(L^p, \|.\|_p)$ *est complet.*

On peut maintenant se demander si les espaces L^p sont des espaces de Hilbert. Ceci est vrai pour $p = 2$, et, en général, faux pour $p \neq 2$ (voir à ce propos l'exercice 6.39). Le cas de L^2 sera étudié en détail dans la section 6.2.

En général, les espaces L^p, avec $1 < p < +\infty$, autres que L^2 ne sont pas des espaces de Hilbert, mais nous verrons ultérieurement (section 6.3) que ce sont des espaces de Banach réflexifs (c'est-à-dire que l'injection canonique entre l'espace et son bi-dual est une bijection, voir Définition 6.72). Les espaces L^1 et L^∞ (que nous verrons au paragraphe suivant) sont des espaces de Banach non réflexifs (sauf cas particuliers).

Remarque 6.14 Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 < p < +\infty$. On peut aussi définir $L^p_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et $L^p_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexes ou réels). Le cas $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est particulièrement intéressant. Il sera muni d'une structure hilbertienne (voir le théorème 6.35).

6.1.2 L'espace L^∞

Définition 6.15 (L'espace $\mathcal{L}^\infty$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* f *une fonction mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}$*);*

1. *on dit que* f *est essentiellement bornée, ou encore que* $f \in \mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *s'il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|f| \le C$ *p.p. ;*
2. *si* $f \in \mathcal{L}^\infty$, *on pose* $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ \,;\, |f| \le C$ *p.p.*$\}$,
3. *si* $f \notin \mathcal{L}^\infty$, *on pose* $\|f\|_\infty = +\infty$.

Remarque 6.16 (Rappels sur la définition de l'inf) Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. On rappelle que A est borné inférieurement s'il existe un minorant de A, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \ge \alpha$ pour tout $x \in A$. Si A est borné inférieurement, on définit la borne inférieure de A comme le plus grand des minorants : $\bar{x} = \inf\{A\} = \max\{\alpha; \alpha \le x$ pour tout $x \in A\}$. Si A n'est pas borné inférieurement, on pose $\inf A = -\infty$. Dans les manipulations sur les inf (et sur les sup) il est utile de connaître le résultat suivant :

$$\bar{x} = \inf A \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A; x_n \downarrow \bar{x} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ceci se démontre très facilement en distinguant deux cas :

1. Si A est non borné inférieurement, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in A$ tel que $y_n \leq -n$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a donc $x_n \downarrow -\infty = \inf A$.
2. Si A est borné inférieurement, soit $\overline{x} = \inf A$. Alors, $\overline{x} + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de A et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in A$ tel que $\overline{x} \leq y_n \leq \overline{x} + \frac{1}{n}$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a clairement : $x_n \downarrow \overline{x}$ lorsque $n \to +\infty$.

Le petit lemme suivant (dont la démonstration est immédiate en écrivant la définition de $\|f\|_\infty$, voir l'exercice corrigé 4.37) est parfois bien utile.

Lemme 6.17 Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p..

La démonstration de ce lemme fait l'objet de l'exercice corrigé 4.37.

On a égalité entre le sup essentiel et le sup pour les fonctions continues :

Proposition 6.18 *Si* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *alors*

$$\|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

DÉMONSTRATION – On distingue 2 cas :

Cas 1. On suppose ici que $|f|$ est non bornée, c'est-à-dire $\|f\|_u = +\infty$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme $|f|$ est non bornée, il existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| > \alpha$. Par continuité de f, il existe alors $\varepsilon > 0$ t.q. $|f(y)| > \alpha$ pour tout $y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. On a donc $\{|f| > \alpha\} \supset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ et donc $\lambda(\{|f| > \alpha\}) \geq 2\varepsilon$. Donc, $|f|$ n'est pas inférieure ou égale à α p.p.. On a donc $\{C \in \mathbb{R}_+ ; |f| \leq C \text{ p.p.}\} = \emptyset$, donc $\|f\|_\infty = +\infty = \|f\|_u$.

Cas 2. On suppose maintenant que $\|f\|_u < +\infty$. On a $|f(x)| \leq \|f\|_u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$.

D'autre part, on sait que $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p.. On a donc $\lambda\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$. Or $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est ouvert (car f est continue), c'est donc un ouvert de mesure nulle, on a donc $\{|f| > \|f\|_\infty\} = \emptyset$ (la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide est toujours strictement positive), ce qui prouve $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\|f\|_u \leq \|f\|_\infty$.

On obtient bien finalement $\|f\|_u = \|f\|_\infty$. ∎

Définition 6.19 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. *On définit* $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence sur* $\mathcal{L}^\infty$ *pour la relation d'équivalence "= p.p.".*
2. *Soit* $F \in L^\infty$. *On pose* $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ *avec* $f \in F$, *de sorte que* $F = \{g \in \mathcal{L}^\infty ; g = f$ *p.p.*$\}$. *(Cette définition est cohérente car* $\|f\|_\infty$ *ne dépend pas du choix de* f *dans* F.*)*

Proposition 6.20 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *et* $\mathrm{L}^\infty = \mathrm{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. *Alors :*

1. $\mathcal{L}^\infty$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et l'application définie de* $\mathcal{L}^\infty$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f \mapsto \|f\|_\infty$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}^\infty$.
2. L^∞ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et l'application définie de* L^∞ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f \mapsto \|f\|_\infty$ *est une norme sur* L^∞. L^∞ *est donc un espace espace vectoriel normé (réel).*

DÉMONSTRATION – 1. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^\infty$, il est clair que $\alpha f \in \mathcal{L}^\infty$ et que $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$.

— Soit $f, g \in \mathcal{L}^\infty$. Comme $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., on montre facilement que $|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ p.p., ce qui prouve que $(f+g) \in \mathcal{L}^\infty$ et que $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

On a bien montré que $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et comme $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty$, l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une semi–norme sur $\mathcal{L}^\infty$.

2. la structure vectorielle de L^∞ s'obtient comme celle de L^p $(p < +\infty)$ et le fait que $f \mapsto \|f\|_\infty$ soit une norme découle du fait que

$$f = 0 \text{ p.p. } \Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0.$$

■

Proposition 6.21 *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est un espace de Banach (réel), c'est-à-dire un e.v.n. complet.*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que L^∞ est un e.v.n.. Le fait qu'il soit complet est la conséquence du fait que toute série absolument convergente dans L^∞ est convergente dans L^∞, ce qui est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.22 (Séries absolument convergentes dans L^∞) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. *On suppose que* $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$. *Alors :*

1. *Il existe* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} |f_k| < \mathrm{C}$ *p.p..*
2. *La série de terme général* $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in \mathrm{E}$, *absolument convergente dans* $\mathbb{R}$. *On définit, pour presque tout* x, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
3. *On a* $f \in \mathrm{L}^\infty$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^\infty$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $|f_n| \leq \|f_n\|_\infty$ p.p., il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|f_n| \leq \|f_n\|_\infty$ sur A_n^c. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$. On a $m(A) = 0$ (par σ-sous additivité de m) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A^c$, $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$.

Pour tout $x \in A^c$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = C < \infty. \tag{6.7}$$

Comme $m(A) = 0$, ceci montre le premier item.

Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. On pose donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \in \mathbb{R}.$$

f est donc définie p.p., elle est m-mesurable (voir la définition 4.13) car limite p.p. de fonctions mesurables. Il existe donc $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ p.p. et (6.7) donne $|g| \leq C$ p.p.. On a donc $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in L^\infty$ (au sens “il existe $g \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g$ p.p.”).

Il reste à montrer que $\sum_{k=0}^{n} f_k \to f$ dans L^∞.

On remarque que, pour tout $x \in A^c$,

$$|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0,$$

quand $n \to +\infty$. Comme $m(A) = 0$, on en déduit

$$\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \leq \sup_{x\in A^c} |\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

et donc $\sum_{k=0}^{n} f_k \to f$ dans L^∞, quand $n \to +\infty$. ■

La proposition 6.22 permet de montrer que L^∞ est complet (théorème 6.21). Elle permet aussi de montrer ce que nous avons appelé précédemment (dans le cas $p < \infty$) réciproque partielle du théorème de convergence dominée. Il est important par contre de savoir que le théorème de convergence dominée peut être faux dans L^∞, comme le montre la remarque suivante.

Remarque 6.23 (Sur la convergence dominée) Le résultat de convergence dominée qu'on a démontré pour les suites de fonctions de L^p, $1 \leq p < +\infty$, est faux pour les suites de fonctions de L^∞. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple suivant : $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda),\ f_n \to 0 \text{ p.p. quand } n \to +\infty,$$
$$f_n \leq 1_{[0,1]} \text{ p.p., pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 1_{[0,1]} \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda).$$

Pourtant, $\|f_n\|_\infty = 1 \not\to 0$, quand $n \to +\infty$.

Par contre, le résultat de réciproque partielle de la convergence dominée est vrai, comme conséquence du résultat que toute suite absolument convergente dans L^∞ est convergente (dans L^∞, proposition 6.22). La démonstration est similaire à la démonstration du théorème 4.49.

Remarque 6.24 Soit (E, T, m) un espace mesuré. On peut aussi définir $L^\infty_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et $L^\infty_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexe ou réels).

6.1.3 Quelques propriétés des espaces $L^p, 1 \le p \le +\infty$

Proposition 6.25 (Comparaison entre les espaces L^p) *Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, i.e. $m(E) < +\infty$. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \le p < q \le +\infty$. Alors, $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. De plus, il existe C, ne dépendant que de p, q et $m(E)$, tel que $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (ceci montre que l'injection de L^q dans L^p est continue).*

DÉMONSTRATION – On distingue les cas $q < \infty$ et $q = \infty$.

Cas $q < \infty$. On suppose ici que $1 \le p < q < +\infty$.

Soit $f \in L^q$. On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour tout $x \in E$, on a $|f(x)|^p \le |f(x)|^q$ si $|f(x)| \ge 1$. On a donc $|f(x)|^p \le |f(x)|^q + 1$, pour tout $x \in E$. Ce qui donne, par monotonie de l'intégrale,

$$\int |f|^p dm \le m(E) + \int |f|^q dm < \infty, \tag{6.8}$$

et donc que $f \in L^p$. On a ainsi montré $L^q \subset L^p$.

On veut montrer maintenant qu'il existe C, ne dépendant que de p, q et $m(E)$, t.q., pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,

$$\|f\|_p \le C\|f\|_q. \tag{6.9}$$

En utilisant (6.8), on remarque que (6.9) est vraie avec $C = (m(E) + 1)^{\frac{1}{p}}$, si $\|f\|_q = 1$. Ceci est suffisant pour dire que (6.9) est vraie avec $C = (m(E)+1)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $f \in L^q$. En effet, (6.9) est trivialement vraie pour $\|f\|_q = 0$ (car on a alors $f = 0$ p.p. et $\|f\|_p = 0$). Puis, si $\|f\|_q > 0$, on pose $f_1 = \frac{f}{\|f\|_q}$ de sorte que $\|f_1\|_q = 1$. On peut donc utiliser (6.9) avec f_1. On obtient $\frac{1}{\|f\|_q}\|f\|_p = \|f_1\|_p \le C$, ce qui donne bien $\|f\|_p \le C\|f\|_q$.

On a donc montré (6.9) avec un C ne dépendant que p et $m(E)$ (et non de q). Toutefois, le meilleur C possible dans (6.9) dépend de p, q et $m(E)$. Ce meilleur C peut être obtenu en utilisant l'inégalité de Hölder généralisée (proposition 6.26). Elle donne $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ (voir la remarque 6.27).

Cas $q = \infty$. On suppose ici que $1 \le p < q = +\infty$.

Soit $f \in L^\infty$. On choisit un représentant de f, encore noté f. On a $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p.. On en déduit $|f|^p \le \|f\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |f|^p dm \le m(E)\|f\|_\infty^p < \infty.$$

Ce qui donne $f \in L^p$ et $\|f\|_p \le C\|f\|_\infty$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}}$.

On voit ici qu'on a obtenu le meilleur C possible (si $m(E) > 0$) car $\|f\|_p = (m(E))^{\frac{1}{p}} = (m(E))^{\frac{1}{p}} \ \|f\|_\infty$ si $f = 1_E$. ■

Proposition 6.26 (Inégalité de Hölder généralisée) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $p, q, r \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. *Soient* $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *Alors,* $fg \in L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et*

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.10}$$

DÉMONSTRATION – Comme d'habitude, on confond un élément de L^s ($s = p$, q ou r) avec un de ses représentants. On travaille donc avec $\mathcal{L}^s$ au lieu de L^s. On suppose donc que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ et on veut montrer que $fg \in \mathcal{L}^r$ et que (6.10) est vraie. On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$.

Ici encore, on distingue plusieurs cas.

Cas 1. On suppose ici $1 \le p, q, r < \infty$.

On pose $f_1 = |f|^r$ et $g_1 = |g|^r$ de sorte que $f_1 \in \mathcal{L}^{\frac{p}{r}}$ et $g_1 \in \mathcal{L}^{\frac{q}{r}}$. Comme $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, on peut appliquer le lemme 6.5 (donnant l'inégalité de Hölder) avec f_1, g_1 (au lieu de f, g) et $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ (au lieu de p, q). Il donne que $f_1 g_1 \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_1 g_1\|_1 \le \|f_1\|_{\frac{p}{r}} \|g_1\|_{\frac{q}{r}}$. On en déduit que $fg \in L^r$ et

$$\int |fg|^r dm \le (\int |f|^p dm)^{\frac{r}{p}} (\int |g|^q dm)^{\frac{r}{q}},$$

ce qui donne (6.10)

Cas 2. On suppose ici $q = \infty$ et $r = p < \infty$.

Comme $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., On a $|fg|^p \le |f|^p \|g\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |fg|^p dm \le \|g\|_\infty^p \int |f|^p dm,$$

ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^p$ et (6.10).

Cas 3. On suppose ici $p = q = r = \infty$.

Comme $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., on a $|fg| \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ p.p., ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^\infty$ et (6.10). ■

Remarque 6.27

1. Par une récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}^*$, on peut encore généraliser la proposition 6.26. Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ et $r \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $f_i \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^{p_i}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Alors, $\prod_{i=1}^{n} f_i \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^{r}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et $\|\prod_{i=1}^{n} f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}$.
2. L'inégalité (6.10) permet aussi de trouver le meilleur C possible dans la proposition 6.25 (Inégalité (6.9)) :

   Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré fini. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \leq p < q < +\infty$. Soit $f \in \mathrm{L}_{\mathbb{R}}^{q}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Comme $1 \leq p < q < \infty$, il existe $r \in [1, \infty[$ t.q. $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. On peut alors utiliser la proposition 6.26 avec $f \in \mathrm{L}^q$ et $1_{\mathrm{E}} \in \mathrm{L}^r$. Elle donne que $f \in \mathrm{L}^p$ et $\|f\|_p \leq \mathrm{C}\|f\|_q$ avec $\mathrm{C} = (m(\mathrm{E}))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Cette valeur de C est la meilleure possible (si $m(\mathrm{E}) > 0$) dans (6.9) car si $f = 1_{\mathrm{E}}$ on obtient $\|f\|_p \leq (m(\mathrm{E}))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$.

Remarque 6.28 Les espaces $\mathrm{L}^p, p \in]0, 1[$ (que l'on peut définir comme dans le cas $1 \leq p < \infty$) sont des espaces vectoriels, mais l'application $f \mapsto \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme sur L^p si $p \in]0, 1[$ (sauf cas particulier).

Remarque 6.29 Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$. L'ensemble $\mathrm{J} = \{p \in [1, +\infty], f \in \mathcal{L}^p\}$ est un intervalle de $[1, +\infty]$. L'application définie de $\overline{\mathrm{J}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $p \mapsto \|f\|_p$ est continue, voir à ce propos l'exercice 4.37, et dans le cas particulier des fonctions continues à support compact, l'exercice 6.11. En particulier, lorsque $p \in \mathrm{J}$, $p \to +\infty$ on a $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$. On en déduit le résultat suivant : s'il existe $p_0 < +\infty$ tel que $f \in \mathcal{L}^p$ pour tout p tel que $p_0 \leq p < +\infty$, et s'il existe C t.q. $\|f\|_p \leq \mathrm{C}$, pour tout $p \in [p_0, +\infty[$, alors $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq \mathrm{C}$.

6.2 Analyse hilbertienne et espace L^2

6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.30 (Produit scalaire)

1. *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *On appelle produit scalaire sur* H *une application de* $\mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{R}$, *notée* $(\cdot \mid \cdot)$ *ou* $(\cdot \mid \cdot)_{\mathrm{H}}$ *t.q.*

   (ps1) $(u \mid u) > 0$ *pour tout* $u \in \mathrm{H} \setminus \{0\}$,

   (ps2) $(u \mid v) = (v \mid u)$ *pour tout* $u, v \in \mathrm{H}$,

   (ps3) $u \mapsto (u \mid v)$ *est une application linéaire de* H *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $v \in \mathrm{H}$.
2. *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$. *On appelle produit scalaire sur* H *une application de* $\mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{C}$, *notée* $(\cdot \mid \cdot)$ *ou* $(\cdot \mid \cdot)_{\mathrm{H}}$ *telle que*

(ps1) $(u \mid u) \in \mathbb{R}_+^*$ *pour tout* $u \in \mathrm{H} \setminus \{0\}$,

(ps2) $(u \mid u) = \overline{(v \mid u)}$ *pour tout* $u, v \in \mathrm{H}$,

(ps3) $u \mapsto (u \mid v)$ *est une application linéaire de* H *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $v \in \mathrm{H}$.

Remarque 6.31 (Exemple fondamental) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré.

1. On prend $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. H est un e.v. sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $fg \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (lemme 6.5 pour $p = q = 2$). L'application $(f, g) \mapsto \int fg dm$ est un produit scalaire sur H.
2. On prend $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (voir le théorème 6.35 ci après). H est un e.v. sur $\mathbb{C}$. En utilisant le lemme 6.5, on montre facilement que $f\overline{g} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (lemme 6.5 pour $p = q = 2$). L'application $(f, g) \mapsto \int f\overline{g} dm$ est un produit scalaire sur H.

Proposition 6.32 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

1. *Soit* H *un e.v. sur* $\mathbb{R}$ *muni d'un produit scalaire, noté* $(\cdot \mid \cdot)$. *Alors :*

$$(u \mid v)^2 \leq (u \mid u)(v \mid v), \text{ pour tout } u, v \in \mathrm{H}. \tag{6.11}$$

   De plus, $(u \mid v)^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ *si et seulement si* u *et* v *sont colinéaires.*

2. *Soit* H *un e.v. sur* $\mathbb{C}$ *muni d'un produit scalaire, noté* $(\cdot \mid \cdot)$. *Alors :*

$$|(u \mid v)|^2 \leq (u \mid u)(v \mid v), \text{ pour tout } u, v \in \mathrm{H}. \tag{6.12}$$

   De plus, $|(u \mid v)|^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ *si et seulement si* u *et* v *sont colinéaires.*

DÉMONSTRATION –

1. On suppose ici $\mathrm{K} = \mathbb{R}$. Soit $u, v \in \mathrm{H}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$p(\alpha) = (u + \alpha v \mid u + \alpha v) = (v \mid v)\alpha^2 + 2\alpha(u \mid v) + (u \mid u).$$

   Comme $p(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = (u \mid v)^2 - (u \mid u)(v \mid v) \leq 0$, ce qui donne (6.11).

   On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.11).

   Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.11) (et u et v sont colinéaires).

   Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, on a égalité dans (6.11) (c'est-à-dire $\Delta = 0$) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(\alpha) = 0$. On a donc égalité dans (6.11) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\alpha v$. On en déduit bien que $(u \mid v)^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

2. On suppose maintenant $K = \mathbb{C}$. Soient $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on pose
$$p(\alpha) = (u + \alpha v \mid u + \alpha v) = \alpha\overline{\alpha}(v \mid v) + \alpha(v \mid u) + \overline{\alpha}(u \mid v) + (u \mid u).$$
On choisit de prendre $\alpha = \beta(u \mid v)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. On pose donc, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(\beta) = p(\beta(u \mid v)) = \beta^2|(u \mid v)|^2(v \mid v) + 2\beta|(u \mid v)|^2 + (u \mid u).$$
Ici encore, comme $\varphi(\beta) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = |(u \mid v)|^4 - |(u \mid v)|^2(v \mid v)(u \mid u) \leq 0$, ce qui donne (6.12).

On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.12)

Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.12) (et u et v sont colinéaires).

On suppose maintenant $u \neq 0$ et $v \neq 0$. On remarque d'abord que, si $(u \mid v) = 0$, on n'a pas égalité dans (6.12) et u et v ne sont pas colinéaires. On suppose donc maintenant que $(u \mid v) \neq 0$. On a alors égalité dans (6.12) si et seulement si $\Delta = 0$ et donc si et seulement s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel qu $\varphi(\beta) = 0$. Donc, on a égalité dans (6.12) si et seulement s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u = -\beta(u \mid v)v$, et donc si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $u = -\alpha v$.

Finalement, on en déduit bien que $|(u \mid v)|^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires. ■

Proposition 6.33 (Norme induite par un produit scalaire) *Soit* H *un e.v. sur* K*, avec* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$*, muni d'un produit scalaire, noté* $(\cdot \mid \cdot)$*. Pour tout* $u \in H$*, on pose* $\|u\|_H = \sqrt{(u \mid u)}$*. Alors,* $\|\cdot\|_H$ *est une norme sur* H*. On l'appelle norme induite par le produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$.

DÉMONSTRATION –

— Il est clair que $\|u\|_H \in \mathbb{R}_+$ pour tout $u \in H$ et que
$$\|u\|_H = 0 \Leftrightarrow (u \mid u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$
— On a bien $\|\alpha u\|_H = |\alpha|\|u\|_H$ pour tout $\alpha \in K$ et tout $u \in H$.

— Enfin, pour montrer l'inégalité triangulaire, soit $u, v \in H$. On a $\|u+v\|_H^2 = (u+v \mid u + v) = (u \mid u) + (v \mid v) + (u \mid v) + (v \mid u)$. Comme, par (6.11) ou (6.12), $|(u \mid v)| \leq \sqrt{(u \mid u)}\sqrt{(v \mid v)} = \|u\|_H\|v\|_H$, on en déduit $\|u + v\|_H^2 \leq (\|u\|_H + \|v\|_H)^2$. Donc,
$$\|u + v\|_H \leq \|u\|_H + \|v\|_H.$$
■

Définition 6.34 (Espace de Hilbert)

1. *Un espace préhilbertien (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$*) normé dont la norme est induite par un produit scalaire.*
2. *Un espace de Hilbert (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$*) normé complet dont la norme est induite par un produit scalaire. C'est donc un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

Théorème 6.35 (L'espace L^2) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré.*

1. L'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, muni de la norme* $\|\cdot\|_2$*, est un espace de Hilbert (réel) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*

$$(f \mid g)_2 = \int f g \ dm.$$

2.

(a) Soit f *une application mesurable de* E *dans* $\mathbb{C}$ *(donc* $|f| \in \mathcal{M}_+$*).*

(b) On dit que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si* $|f|^2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*. Pour* $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, on pose* $\|f\|_2 = \sqrt{\||f|^2\|_1}$*. Alors,* $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *et* $f \mapsto \|f\|_2$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*.*

(c) On appelle $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *l'espace* $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *quotienté par la relation d'équivalence "= p.p.". Pour* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, on pose* $\|\mathrm{F}\|_2 = \|f\|_2$ *avec* $f \in \mathrm{F}$ *(noter que* $\|f\|_2$ *ne dépend pas du choix de* f *dans* F*). Alors* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, muni de* $\|\cdot\|_2$*, est un espace de Banach (complexe).*

(d) L'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, muni de la norme* $\|\cdot\|_2$*, est un espace de Hilbert (complexe) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*

$$(f \mid g)_2 = \int f \overline{g} \ dm.$$

DÉMONSTRATION – 1. On sait déjà que $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach (réel). Le lemme 6.5 pour $p = q = 2$ donne que $fg \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. On peut donc poser $(f \mid g)_2 = \int f g dm$. Il est facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_2$ est un produit scalaire et que la norme induite par ce produit scalaire est bien la norme $\|\cdot\|_2$.

2. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ mesurable. On rappelle (section 4.10) que les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* appartiennent à $\mathcal{M}$). On a donc bien $|f| \in \mathcal{M}_+$ et $|f|^2 = (\mathfrak{Re}(f))^2 + (\mathfrak{Im}(f))^2 \in \mathcal{M}_+$.

   Comme $|f|^2 = (\mathfrak{Re}(f))^2 + (\mathfrak{Im}(f))^2 \in \mathcal{M}_+$, on remarque aussi que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Comme $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est un e.v. (sur $\mathbb{R}$), il est alors immédiat de voir que $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est un e.v. sur $\mathbb{C}$.

   On quotiente maintenant $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ par la relation "= p.p.". On obtient ainsi l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ que l'on munit facilement d'une structure vectorielle sur $\mathbb{C}$. L'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est donc un e.v. sur $\mathbb{C}$.

En utilisant le lemme 6.5, on montre facilement que $f\overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ (on utilise le fait que les parties réelles et imaginaires de f et g sont dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$). On peut donc poser $(f \mid g)_2 = \int f\overline{g}dm$. Il est aussi facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_2$ est alors un produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et que la norme induite par ce produit scalaire est justement $\|\cdot\|_2$ (car $|f|^2 = f\overline{f}$ et donc $\int f\overline{f}dm = \|f\|_2^2$). On a, en particulier, ainsi montré que $f \mapsto \|f\|_2$ est bien une norme sur $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On en déduit aussi que $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

On a montré que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace préhilbertien. il reste à montrer qu'il est complet (pour la norme $\|\cdot\|_2$). Ceci est facile. En effet, $\|f\|_2^2 = \|\mathfrak{Re}(f)\|_2^2 + \|\mathfrak{Im}(f)\|_2^2$ pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$. Donc, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est de Cauchy si et seulement si les suites $(\mathfrak{Re}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et cette même suite converge dans $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si et seulement si les suites $(\mathfrak{Re}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Le fait que $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ soit complet découle alors du fait que $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est complet.

■

Remarquons que dans le cas $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder est en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 6.36 (Continuité du produit scalaire)
Soit H *un espace de Hilbert réel ou complexe. Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ *et* $u, v \in H$ *tels que* $u_n \to u$ *et* $v_n \to v$ *dans* H, *quand* $n \to +\infty$. *Alors,* $(u_n \mid v_n) \to (u \mid v)$ *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Il suffit de remarquer que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalités (6.11) et (6.12)), on a :

$$
\begin{aligned}
|(u_n \mid v_n) - (u \mid v)| &\le |(u_n \mid v_n) - (u_n \mid v)| + |(u_n \mid v) - (u \mid v)| \\
&\le \|u_n\|\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\|.
\end{aligned}
$$

On conclut en utilisant le fait que $u_n \to u$, $v_n \to v$ et en remarquant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente. ■

Définition 6.37 (Dual d'un espace de Banach) Soit H un Banach réel ou complexe. On note H' (ou $\mathcal{L}(H,K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). Si $T \in H'$, on pose

$$
\|T\|_{H'} = \sup_{u \in H\setminus\{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}.
$$

On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H′ et que H′, muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K).

Enfin, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \leq \|T\|_{H'}\|u\|_H$.

Remarque 6.38 Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.11) ou (6.12)), on voit que $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \leq \|v\|_H$. Il est facile alors de voir que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$. Ceci montre que $v \mapsto \varphi_v$ est une application injective de H dans H′. le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56), fondamental, montrera que cette application est surjective.

Il est naturel de se demander si deux produits scalaires (sur un même espace vectoriel) peuvent induire la même norme. La réponse est non. En effet, le produit scalaire est entièrement déterminé par la norme qu'il induit. Par exemple, dans le cas d'un espace vectoriel réel, si une norme $\|\cdot\|$ est induite par un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, on doit avoir, pour tout u, v, $(u \mid v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$, voir exercice 6.28. Un moyen simple pour savoir si l'application $(u,v) \mapsto \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ est bien un produit scalaire est d'utiliser l'identité du parallèlogramme.

Proposition 6.39 (Identité du parallèlogramme)
Soit H *un espace de Hilbert (réel ou complexe). Alors, pour tout* $u, v \in H$*, on a*

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2. \tag{6.13}$$

Cette identité s'appelle identité du parallélogramme.

DÉMONSTRATION – Il suffit d'écrire $\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = (u+v \mid u+v) + (u-v \mid u-v)$ et de développer les produits scalaires. ■

Remarque 6.40 (De l'utilité de l'identité du parallèlograme)
On se donne maintenant un e.v.n. noté H. Comment savoir si la norme est induite ou non par un produit scalaire ? On peut montrer que la norme est induite par un produit scalaire si et seulement si l'identité du parallélogramme (6.13) est vraie pour tout $u, v \in H$, voir exercice 6.28. Ceci est surtout utile pour montrer qu'une norme n'est pas induite par un produit scalaire (on cherche $u, v \in H$ ne vérifiant pas (6.13)), voir à ce propos l'exercice 6.29.

Nous abordons à présent la notion fondamentale d'orthogonalité, qui est liée à la notion de produit scalaire ; cette notion est une des briques de base de la démonstration du théorème de représentation de Riesz qui permet d'identifier un espace de Hilbert et son dual topologique (c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur cet espace).

Définition 6.41 (Orthogonal) *Soit* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe).*

1. *Soit* $u, v \in H$. *On dit que* u *et* v *sont orthogonaux (et on note* $u \perp v$*) si* $(u \mid v) = 0$.
2. *Soit* $A \subset H$. *On appelle orthogonal de* A *l'ensemble* $A^\perp = \{u \in H\,;\, (u \mid v) = 0$ *pour tout* $v \in A\}$.

Proposition 6.42 (Propriétés de l'orthogonal) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $A \subset H$. *Alors :*

1. $A^\perp$ *est un s.e.v. fermé de* H*,*
2. $A^\perp = \overline{A}^\perp$*,*
3. $A \subset (A^\perp)^\perp$ *(que l'on note aussi* $A^{\perp\perp}$*).*

DÉMONSTRATION – 1. Soit $u_1, u_2 \in A^\perp$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ selon que H est un espace de Hilbert réel ou complexe). Pour tout $v \in A$, on a $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \mid v) = \alpha_1 (u_1 \mid v) + \alpha_2 (u_2 \mid v) = 0$. Donc, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in A^\perp$, ce qui montre que $A^\perp$ est un s.e.v. de H.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^\perp$ telle que $u_n \to u$ dans H, quand $n \to +\infty$. L'application $w \mapsto (w \mid v)$ est continue de H dans K (voir la remarque (6.38)) pour tout $v \in H$. Soit $v \in A$, de $(u_n \mid v) = 0$ on déduit donc que $(u \mid v) = 0$. Ce qui montre que $u \in A^\perp$ et donc que $A^\perp$ est fermé.

2. — Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$.

   — Soit maintenant $u \in A^\perp$. On veut montrer que $u \in \overline{A}^\perp$.

   Soit $v \in \overline{A}$, il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.q. $v_n \to v$ dans H quand $n \to +\infty$. Comme $(u \mid v_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit, par continuité de $w \mapsto (u \mid w)$, que $(u \mid v) = 0$. Donc $u \in \overline{A}^\perp$, ce qui donne $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$.

   Finalement, on a bien montré $A^\perp = \overline{A}^\perp$.

3. Soit $v \in A$. On a $(u \mid v) = 0$ pour tout $u \in A^\perp$, donc $(v \mid u) = 0$ pour tout $u \in A^\perp$, ce qui donne $v \in (A^\perp)^\perp$

■

Remarque 6.43 Dans le dernier item de la proposition précédente, on peut se demander si $A = A^{\perp\perp}$. On montrera, dans la section suivante que ceci est vrai si A est s.e.v. fermé (ce qui est aussi une condition nécessaire).

On termine cette section avec le théorème de Pythagore.

Théorème 6.44 (Pythagore) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $u_1, \ldots, u_n \in H$ *tels que* $(u_i \mid u_j) = 0$ *si* $i \neq j$. *Alors :*

$$\|\sum_{i=1}^{n} u_i\|_H^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_H^2. \tag{6.14}$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat est immédiate, par récurrence sur n. L'égalité (6.14) est vraie pour $n = 1$ (et tout $u_1 \in H$). Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que (6.14) est vraie (pour tout $u_1, \ldots, u_n \in H$). Soit $u_1, \ldots, u_{n+1} \in H$. On pose $y = \sum_{i=1}^{n} u_i$, de sorte que

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_H^2 = \|y + u_{n+1}\|_H^2 &= (y + u_{n+1} \mid y + u_{n+1}) \\ &= (y \mid y) + (y \mid u_{n+1}) + (u_{n+1} \mid y) + (u_{n+1} \mid u_{n+1}).\end{aligned}$$

Comme $(y \mid u_{n+1}) = 0 = (u_{n+1} \mid y)$, on en déduit, avec l'hypothèse de récurrence, que

$$\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_H^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|u_i\|_H^2.$$

■

6.2.2 Projection sur un convexe fermé non vide

Remarque 6.45 Soit E un ensemble muni d'une distance, notée d (E est alors un espace métrique). Soit $A \subset E$. On pose $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Il n'existe pas toujours de $x_0 \in A$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, A)$ et, si un tel x_0 existe, il peut être non unique. Par exemple, dans le cas où A est compact (pour la topologie induite par d), x_0 existe mais peut être non unique.

Dans le cas où il existe un et un seul $x_0 \in A$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, A)$, x_0 est appelé projection de x sur A.

L'objectif de cette section est de montrer l'existence et l'unicité de x_0 dans le cas où A est une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert (et d la distance induite par la norme de l'espace de Hilbert).

Définition 6.46 (Partie convexe) *Soit* E *un e.v. sur* K, *avec* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$. *Soit* $C \subset E$. *On dit que* C *est convexe si :*

$$u, v \in C,\ t \in [0, 1] \Rightarrow tu + (1 - t)v \in C.$$

Théorème 6.47 (Projection sur un convexe fermé non vide)

Soient H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $\mathrm{C} \subset \mathrm{H}$ *une partie convexe fermée non vide. Soit* $x \in \mathrm{H}$*. Alors, il existe un et un seul* $x_0 \in \mathrm{C}$ *t.q.* $d(x, x_0) = d(x, \mathrm{C}) = \inf_{y \in \mathrm{C}} d(x, y)$ *(avec* $d(x, y) = \|x - y\|_{\mathrm{H}}$*). On note* $x_0 = \mathrm{P}_{\mathrm{C}}(x)$*.* P_{C} *est donc une application de* H *dans* H *(dont l'image est égale à* C*). On écrit souvent* $\mathrm{P}_{\mathrm{C}} x$ *au lieu de* $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(x)$*.*

DÉMONSTRATION – **Existence de x_0.**
On pose $d = d(x, \mathrm{C}) = \inf_{y \in \mathrm{C}} d(x, y)$. Comme $\mathrm{C} \neq \emptyset$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{C}$ t.q. $d(x, y_n) \to d$ quand $n \to +\infty$. On va montrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en utilisant l'identité du parallélogramme (6.13) (ce qui utilise la structure hilbertienne de H) et la convexité de C. L'identité du parallélogramme donne

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|_{\mathrm{H}}^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|_{\mathrm{H}}^2 \\ &= -\|(y_n - x) + (y_m - x)\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_n - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_m - x\|_{\mathrm{H}}^2,\end{aligned}$$

et donc

$$\|y_n - y_m\|_{\mathrm{H}}^2 = -4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_n - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_m - x\|_{\mathrm{H}}^2. \tag{6.15}$$

Comme C est convexe, on a $\frac{y_n + y_m}{2} \in \mathrm{C}$ et donc $d \leq \|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|_{\mathrm{H}}$. On déduit alors de (6.15) :

$$\|y_n - y_m\|_{\mathrm{H}}^2 \leq -4d^2 + 2\|y_n - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_m - x\|_{\mathrm{H}}^2. \tag{6.16}$$

Comme $d(y_n, x) = \|y_n - x\|_{\mathrm{H}} \to d$ quand $n \to +\infty$, on déduit de (6.16) que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Comme H est complet, il existe donc $x_0 \in \mathrm{H}$ t.q. $y_n \to x_0$ quand $n \to +\infty$. Comme C est fermée, on a $x_0 \in \mathrm{C}$. Enfin, comme $\|x - y_n\|_{\mathrm{H}} \to d$ quand $n \to +\infty$, on a, par continuité (dans H) de $z \mapsto \|z\|_{\mathrm{H}}$, $d(x, x_0) = \|x - x_0\|_{\mathrm{H}} = d = d(x, \mathrm{C})$, ce qui termine la partie existence.

Unicité de x_0. Soit $y_1, y_2 \in \mathrm{C}$ t.q. $d(x, y_1) = d(x, y_2) = d(x, \mathrm{C}) = d$. On utilise encore l'identité du parallélogramme. Elle donne (voir (6.15)) :

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\|_{\mathrm{H}}^2 &= -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_1 - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 2\|y_2 - x\|_{\mathrm{H}}^2 \\ &= -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_{\mathrm{H}}^2 + 4d^2.\end{aligned}$$

Comme $\frac{y_1 + y_2}{2} \in \mathrm{C}$ On a donc $d \leq \|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_{\mathrm{H}}$ et donc $\|y_1 - y_2\|_{\mathrm{H}}^2 \leq -4d^2 + 4d^2 = 0$. Donc $y_1 = y_2$. Ce qui termine la partie unicité. ■

Remarque 6.48 Le théorème précédent est, en général, faux si on remplace “Hilbert” par “Banach”. Un exemple de non existence est donné à l'exercice 6.33 (et il est facile de trouver des exemples de non unicité).

On donne maintenant deux caractérisations importantes de la projection. La première est valable pour tout convexe fermé non vide alors que la deuxième ne concerne que les s.e.v. fermés.

Proposition 6.49 (Première caractérisation de la projection) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $C \subset H$ *une partie convexe fermée non vide. Soient* $x \in H$ *et* $x_0 \in C$.

1. On suppose que H *est un Hilbert réel. Alors :*

$$x_0 = P_C x \Leftrightarrow (x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C. \tag{6.17}$$

2. On suppose que H *est un Hilbert complexe. Alors :*

$$x_0 = P_C x \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C. \tag{6.18}$$

DÉMONSTRATION –

Cas d'un Hilbert réel

- **Sens** ($\Rightarrow$) On veut montrer que $(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$, pour tout $y \in C$. Comme $x_0 = P_C x$, on a $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2$ pour tout $z \in C$. Soit $y \in C$. On prend $z = ty + (1-t)x_0$ avec $t \in]0,1]$. Comme C est convexe, on a $z \in C$ et donc
$$\begin{aligned}\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2 &= (x - x_0 - t(y - x_0) \mid x - x_0 - t(y - x_0))\\ &= \|x - x_0\|_H^2 + t^2\|y - x_0\|_H^2 - 2t(x - x_0 \mid y - x_0).\end{aligned}$$
On en déduit
$$2t(x - x_0 \mid y - x_0) - t^2\|y - x_0\|_H^2 \leq 0.$$
On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir
$$2(x - x_0 \mid y - x_0) - t\|y - x_0\|_H^2 \leq 0,$$
ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :
$$(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0.$$
- **Sens** ($\Leftarrow$)
On veut montrer que $x_0 = P_C x$, c'est-à-dire $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - y\|_H^2$ pour tout $y \in C$.
Soit $y \in C$, on a $\|x-y\|_H^2 = \|x-x_0+x_0-y\|_H^2 = \|x-x_0\|_H^2+\|x_0-y\|_H^2+2(x-x_0 \mid x_0 - y) \geq \|x - x_0\|_H^2$ car $\|x_0 - y\|_H^2 \geq 0$ et $2(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

- **Sens** ($\Rightarrow$)
On veut montrer que $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$, pour tout $y \in C$.

En reprenant les mêmes notations que dans le cas Hilbert réel et en suivant la même démarche, on obtient :

$$\begin{aligned}\|x-x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \le \|x-z\|_{\mathrm{H}}^2 = (x-x_0-t(y-x_0) \mid x-x_0-t(y-x_0))\\ = \|x-x_0\|_{\mathrm{H}}^2 + t^2\|y-x_0\|_{\mathrm{H}}^2 - 2t\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid y-x_0).\end{aligned}$$

On en déduit

$$2t\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid y-x_0) - t^2\|y-x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \le 0.$$

On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t>0$) pour obtenir

$$2\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid y-x_0) - t\|y-x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \le 0,$$

ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :

$$\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid x_0-y) \ge 0.$$

- **Sens** ($\Leftarrow$)

  On veut montrer que $x_0 = \mathrm{P_C}x$, c'est-à-dire $\|x-x_0\|_{\mathrm{H}}^2 \le \|x-y\|_{\mathrm{H}}^2$ pour tout $y \in \mathrm{C}$.

  Soit $y \in \mathrm{C}$, on a $\|x-y\|_{\mathrm{H}}^2 = \|x-x_0+x_0-y\|_{\mathrm{H}}^2 = \|x-x_0\|_{\mathrm{H}}^2+\|x_0-y\|_{\mathrm{H}}^2+2\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid x_0-y) \ge \|x-x_0\|_{\mathrm{H}}^2$ car $\|x_0-y\|_{\mathrm{H}}^2 \ge 0$ et $2\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid x_0-y) \ge 0$.

■

Remarque 6.50 On prend comme espace de Hilbert réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ (avec $\mathrm{E} \neq \emptyset$) et on prend $\mathrm{C} = \{f \in \mathrm{H} : f \ge 0 \text{ p.p.}\}$. On peut montrer que C est une partie convexe fermée non vide et que $\mathrm{P_C}f = f^+$ pour tout $f \in \mathrm{H}$. Ceci est fait dans l'exercice 6.32.

Un s.e.v. fermé est, en particulier, un convexe fermé non vide. On peut donc définir la projection sur un s.e.v. fermé. On donne maintenant une caractérisation de la projection dans ce cas particulier.

Proposition 6.51 (Deuxième caractérisation de la projection) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. fermé de* H. *Soient* $x \in \mathrm{H}$ *et* $x_0 \in \mathrm{F}$. *Alors :*

$$x_0 = \mathrm{P_F}x \Leftrightarrow (x-x_0) \in \mathrm{F}^\perp. \tag{6.19}$$

DÉMONSTRATION – **Cas d'un Hilbert réel**

— **Sens** ($\Leftarrow$)

On veut montrer que $x_0 = \mathrm{P_F}x$. On utilise la première caractérisation. Soit $y \in \mathrm{F}$. Comme $(x-x_0) \in \mathrm{F}^\perp$, on a $(x-x_0 \mid x_0-y) = 0 \ge 0$ (car $x_0 - y \in \mathrm{F}$). Donc, la proposition 6.49 donne $x_0 = \mathrm{P_F}x$.

— **Sens** ($\Rightarrow$)

On veut montrer que $(x-x_0) \in \mathrm{F}^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.49) donne $(x-x_0 \mid x_0-y) \ge 0$ pour tout $y \in \mathrm{F}$. Soit $z \in \mathrm{F}$. On choisit $y = x_0+z \in \mathrm{F}$ (car F est un s.e.v.) pour obtenir $(x-x_0 \mid z) \le 0$ et $y = x_0 - z \in \mathrm{F}$ pour obtenir $(x-x_0 \mid z) \ge 0$. On en déduit $(x-x_0 \mid z) = 0$, ce qui donne que $(x-x_0) \in \mathrm{F}^\perp$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

— **Sens ($\Leftarrow$)**

On veut montrer que $x_0 = P_F x$. Soit $y \in F$. Comme $(x - x_0) \in F^\perp$, on a $(x - x_0 \mid x_0 - y) = 0$ (car $x_0 - y \in F$). On a donc $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) = 0$. Donc, la proposition 6.49 donne $x_0 = P_F x$.

— **Sens ($\Rightarrow$)**

On veut montrer que $(x - x_0) \in F^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.49) donne $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$ pour tout $y \in F$. Soit $z \in F$. On choisit $y = x_0 - \alpha z \in F$ (car F est un s.e.v.) avec $\alpha = (x - x_0 \mid z)$ pour obtenir $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid \alpha z) \leq 0$. Mais $(x - x_0 \mid \alpha z) = \overline{\alpha}(x - x_0 \mid z) = |(x - x_0 \mid z)|^2$. Donc, $0 \geq \mathfrak{Re}(x - x_0 \mid \alpha z) = |(x - x_0 \mid z)|^2$. On en déduit $(x - x_0 \mid z) = 0$, ce qui donne que $(x - x_0) \in F^\perp$.

■

Définition 6.52 (Projection orthogonale et projecteurs algébriques)

1. *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $F \subset H$ *un s.e.v. fermé de* H. *L'opérateur* P_F *s'appelle projecteur orthogonal sur* F. *Si* $u \in H$, $P_F u$ *s'appelle la projection orthogonale de* u *sur* F.
2. *(Rappel algébrique) Soit* E *un e.v. sur* K ($K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$). *Soient* F, G *deux s.e.v. de* E *t.q.* $E = F \oplus G$. *Pour* $x \in E$, *il existe donc un et un seul couple* $(y, z) \in F \times G$ *t.q.* $x = y + z$. *On pose* $y = Px$ *et donc* $z = (I - P)x$ *(où I est l'application identité).* P *et* $I - P$ *sont les projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$. *Ce sont des applications linéaires de* E *dans* E. *L'image de* P *est égale à* F *et l'image de* $I - P$ *est égale à* G.

   Dans le prochain théorème, on va comparer la projection orthogonale et des projecteurs algébriques particuliers.

Théorème 6.53 (Projecteur orthogonal et projecteur algébrique) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. fermé de* H. *Alors :*

1. $H = F \oplus F^\perp$,
2. P_F *(projecteur orthogonal sur* F*) est égal au projecteur algébrique sur* F *associé à la décomposition* $H = F \oplus F^\perp$.
3. $F = F^{\perp\perp}$.

DÉMONSTRATION – On rappelle que l'on a déjà vu que $F^\perp$ est un s.e.v. fermé.

1. Soit $u \in H$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.51) donne $(u - P_F u) \in F^\perp$. Comme $P_F u \in F$, on en déduit que $H = F + F^\perp$.

   Soit maintenant $u \in F \cap F^\perp$. On doit donc avoir $(u \mid u) = 0$, ce qui donne $u = 0$ et donc $F \cap F^\perp = \{0\}$.

   On a donc $H = F \oplus F^\perp$.
2. Soit $u \in H$. Comme $u = P_F u + (u - P_F u)$, avec $P_F u \in F$ et $(u - P_F u) \in F^\perp$, on voit que P_F est égal au projecteur algébrique sur F associé à la décomposition $H = F \oplus F^\perp$. (Noter aussi que $(I - P_F)$ est égal au projecteur algébrique sur $F^\perp$ associé à la décomposition $H = F \oplus F^\perp$.)
3. Il reste à montrer que $F = F^{\perp\perp}$.
   — On a déjà vu que $F \subset F^{\perp\perp}$.
   — Soit $u \in F^{\perp\perp}$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.51) donne $(u - P_F u) \in F^\perp$ et on a aussi $(u - P_F u) \in F^{\perp\perp}$ car $u \in F^{\perp\perp}$ et $P_F u \in F \subset F^{\perp\perp}$. On a donc $(u - P_F u) \in F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$. Donc $u = P_F u \in F$. On a donc montré que $F^{\perp\perp} \subset F$.

   Finalement, on a bien montré que $F = F^{\perp\perp}$.

■

Le théorème 6.53 a un corollaire très utile :

Corollaire 6.54 *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. de* H. *Alors :*

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}.$$

DÉMONSTRATION – $\overline{F}$ est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.53 donne donc $H = \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp$. On a déjà vu que $(\overline{F})^\perp = F^\perp$, on a donc

$$H = \overline{F} \oplus F^\perp,$$

d'où l'on déduit

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}.$$

■

6.2.3 Théorème de Représentation de Riesz

Remarque 6.55 On rappelle ici la définition 6.37 et la remarque 6.38. Soit H un Banach réel ou complexe. On note H' (ou $\mathcal{L}(H, K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). On rappelle que H^* est l'ensemble des applications linéaires de H dans K. On a donc $H' \subset H^*$. Si H est de dimension finie, on a $H' = H^*$, mais si H est de dimension infinie, on peut montrer que $H' \neq H^*$.

1. Si $T \in H^*$, on rappelle que T est continue si seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. $|T(u)| \leq k\|u\|_H$, pour tout $u \in H$.

2. Si $T \in H'$, on pose $\|T\|_{H'} = \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}$. On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H′ et que H′, muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K). Noter que H′, muni de cette norme, est un espace de Banach même si H est un e.v.n. non complet. Noter aussi que, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \leq \|T\|_{H'}\|u\|_H$.

3. On suppose maintenant que H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.11) ou (6.12)), on a $|\varphi_v(u)| \leq \|u\|_H\|v\|_H$. On a donc $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \leq \|v\|_H$. En remarquant que $\varphi_v(v) = \|v\|_H^2$, on montre alors que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$.

   On considère maintenant l'application $\varphi : H \to H'$ définie par $\varphi(v) = \varphi_v$ pour tout $v \in H$.

   — Si $K = \mathbb{R}$, φ est une application linéaire de H dans H′ car, pour tout $v, w \in H$ tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in H$,

   $$\varphi_{\alpha v + \beta w}(u) = (u \mid \alpha v + \beta w) = \alpha(u \mid v) + \beta(u \mid w) = \alpha\varphi_v(u) + \beta\varphi_w(u),$$

   ce qui donne $\varphi_{\alpha v + \beta w} = \alpha\varphi_v + \beta\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc injective.)

   — Si $K = \mathbb{C}$, φ est une application anti-linéaire de H dans H′ car, pour tout $v, w \in H$ tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in H$

   $$\varphi_{\alpha v + \beta w}(u) = (u \mid \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha}(u \mid v) + \overline{\beta}(u \mid w) = \overline{\alpha}\varphi_v(u) + \overline{\beta}\varphi_w(u),$$

   ce qui donne $\varphi_{\alpha v + \beta w} = \overline{\alpha}\varphi_v + \overline{\beta}\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (anti-linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc, ici aussi, injective.)

   L'objectif du théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) est de montrer que l'application φ est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(\varphi) = H'$.

Théorème 6.56 (Représentation de Riesz) *Soit* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit* $T \in H'$. *Alors, il existe un et un seul élément de* H, *noté* v, *tel que*

$$T(u) = (u \mid v), \text{ pour tout } u \in H. \tag{6.20}$$

L'application φ *définie dans la remarque 6.55 est donc surjective (le résultat ci-dessus donne* $T = \varphi_v$*).*

DÉMONSTRATION –

Existence de v On pose $F = \mathrm{Ker}(T)$. Comme T est linéaire et continue, F est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.53 donne donc $H = F \oplus F^{\perp}$. On distingue deux cas :

- **Cas 1.** On suppose ici que $T = 0$. On a alors $F = E$ et il suffit de prendre $v = 0$ pour avoir (6.20).
- **Cas 2.** On suppose maintenant que $T \neq 0$. On a donc $F \neq H$ et donc $F^{\perp} \neq \{0\}$ (car $H = F \oplus F^{\perp}$). Il existe donc $v_0 \in F^{\perp}$, $v_0 \neq 0$. Comme $v_0 \notin F$, on a $T(v_0) \neq 0$.

  Pour $u \in H$, on a alors
  $$u = u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 + \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0. \tag{6.21}$$
  On remarque que $u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 \in F$ car
  $$T(u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0) = T(u) - \frac{T(u)}{T(v_0)} T(v_0) = 0.$$
  Donc, comme $v_0 \in F^{\perp}$, on a $(u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 \mid v_0) = 0$ et (6.21) donne
  $$(u \mid v_0) = (\frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 \mid v_0) = \frac{T(u)}{T(v_0)} (v_0 \mid v_0),$$
  d'où l'on déduit
  $$T(u) = \frac{T(v_0)}{(v_0 \mid v_0)} (u \mid v_0).$$
  On pose $v = \frac{T(v_0)}{(v_0|v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{R}$ et $v = \frac{\overline{T(v_0)}}{(v_0|v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{C}$. On a bien
  $$T(u) = (u \mid v), \text{ pour tout } u \in H,$$
  c'est-à-dire $T = \varphi_v$ (avec les notations de la remarque 6.55).

Dans les deux cas on a bien trouvé $v \in H$ vérifiant (6.20).

Unicité de v Soient $v_1, v_2 \in H$ t.q. $T = \varphi_{v_1} = \varphi_{v_2}$ (avec les notations de la remarque 6.55). Comme φ est linéaire (si $K = \mathbb{R}$) ou anti-linéaire (si $K = \mathbb{C}$), on en déduit $\varphi_{v_1 - v_2} = \varphi_{v_1} - \varphi_{v_2} = 0$. Comme φ est une isométrie, on a donc $v_1 = v_2$, ce qui donne la partie unicité du théorème. ■

Remarque 6.57 (Densité du noyau d'une forme linéaire non continue) Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit $T \in H^* \setminus H'$. T est donc une application linéaire de H dans $K(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, non continue. On pose $F = \mathrm{Ker}(T)$. La démonstration du théorème 6.56 permet alors de montrer que $F^{\perp} = \{0\}$ et donc $\overline{F} = H$ (dans un Hilbert H, le noyau d'une forme linéaire non continue est donc toujours dense dans H). En effet, on raisonne par l'absurde :

si $F^{\perp} \neq \{0\}$, il existe $v_0 \in F^{\perp}$, $v_0 \neq 0$. le raisonnement fait pour démontrer le théorème 6.56 donne alors $T(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in H$, avec $v = \frac{T(v_0)}{(v_0|v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{R}$ et

$v = \frac{\overline{T(v_0)}}{(v_0|v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{C}$. On en déduit que T est continu, contrairement à l'hypothèse de départ.

On a donc $F^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{F}^\perp = F^\perp = \{0\}$. On en déduit, comme $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$ (par le théorème 6.53, car $\overline{F}$ est toujours un s.e.v. fermé), que $H = \overline{F}$.

Remarque 6.58 (Structure hilbertienne de H'**)** Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). On sait déjà que H' (avec la norme habituelle, voir la remarque 6.55) est un espace de Banach. Le théorème 6.56 permet aussi de montrer que H' est un espace de Hilbert. En effet, en prenant les notations de la remarque 6.55, l'application φ est un isométrie bijective, linéaire ou anti-linéaire de H dans H'. Cela suffit pour montrer que l'identité du parallélogramme (identité (6.13)) est vraie sur H' et donc que H' est une espace de Hilbert (voir la remarque 6.40). Mais on peut même construire le produit scalaire sur H' (induisant la norme usuelle de H') :

Soient $T_1, T_2 \in H'$. Par le théorème 6.56, il existe v_1 et $v_2 \in H$ tels que $T_1 = \varphi_{v_1}$ et $T_2 = \varphi_{v_2}$. On pose $(T_1 \mid T_2)_{H'} = (v_2 \mid v_1)_H$ (où $(\cdot \mid \cdot)_H$ désigne ici le produit scalaire dans H). Il est facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_{H'}$ est un produit scalaire sur H'. Il induit bien la norme usuelle de H' car $(T_1 \mid T_1)_{H'} = (v_1 \mid v_1)_H = \|v_1\|_H^2 = \|\varphi_{v_1}\|_{H'}^2 = \|T_1\|_{H'}^2$ car φ est une isométrie.

6.2.4 Bases hilbertiennes

Soient E un e.v. sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $B = \{e_i, i \in I\} \subset E$ une famille d'éléments de E (l'ensemble I est quelconque, il peut être fini, dénombrable ou non dénombrable). On rappelle que $B = \{e_i, i \in I\} \subset E$ est une base (algébrique) de E si B vérifie les deux propriétés suivantes :

1. B est libre, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i\in J} \alpha_i e_i = 0, \text{ avec} \\ J \subset I, \operatorname{card}(J) < +\infty, \\ \alpha_i \in K \text{ pour tout } i \in J \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ pour tout } i \in J,$$

2. B est génératrice, c'est-à-dire que pour tout $u \in E$, il existe $J \subset I$, $\operatorname{card}(J) < +\infty$, et il existe $(\alpha_i)_{i\in J} \subset K$ t.q. $u = \sum_{i\in J} \alpha_i e_i$.

En notant vect$\{e_i, i \in I\}$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{e_i, i \in I\}$, le fait que B soit génératrice s'écrit donc : $E = \text{vect}\{e_i, i \in I\}$.

On rappelle aussi que tout espace vectoriel admet des bases (algébriques). Cette propriété se démontre à partir de l'axiome du choix.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, on va définir maintenant une nouvelle notion de base : la notion de base hilbertienne.

Définition 6.59 (Base hilbertienne) *Soient* H *un espace de Hilbert sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *et* $B = \{e_i,\ i \in I\} \subset H$ *une famille d'éléments de* H *(l'ensemble* I *est quelconque). La famille* B *est une base hilbertienne de* H *si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases}$ *pour tout* $i, j \in I$.

2. $\overline{vect\{e_i,\ i \in I\}} = H$. *On rappelle que* $vect\{e_i,\ i \in I\} = \{\sum_{i\in J} \alpha_i e_i,\ J \subset I,\ \mathrm{card}(J) < +\infty,\ (\alpha_i)_{i\in J} \subset K\}$.

Remarque 6.60 Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si H est de dimension finie, il existe des bases hilbertiennes (qui sont alors aussi des bases algébriques). Le cardinal d'une base hilbertienne est alors égal à la dimension de H puisque, par définition, la dimension de H est égal au cardinal d'une base algébrique (ce cardinal ne dépendant pas de la base choisie). La démonstration de l'existence de bases hilbertiennes suit celle de la proposition 6.62 (la récurrence dans la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(H) - 1$, voir la preuve de la proposition 6.62).
2. Si H est de dimension infinie et que H est séparable (voir la définition 6.61), il existe des bases hilbertiennes dénombrables (voir la proposition 6.62).
3. Si H est de dimension infinie et que H est non séparable, il existe toujours des bases hilbertiennes (ceci se démontre avec l'axiome du choix), mais elles ne sont plus dénombrables.

Définition 6.61 (Espace séparable) *Soit* E *un e.v.n. sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On dit que* E *est séparable s'il existe* $A \subset E$ *t.q.* $\overline{A} = E$ *et* A *au plus dénombrable.*

Proposition 6.62 (Existence d'une base hilbertienne) *Soit* H *un espace de Hilbert sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *de dimension infinie. On suppose que* H *est séparable. Alors, il existe une base hilbertienne* $B = \{e_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset H$ *de* H.

DÉMONSTRATION – Comme H est séparable, il existe une famille $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset H$ dense dans H, c'est-à-dire t.q. $\overline{\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}} = H$.

On va construire, par une récurrence sur n, une famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ t.q. :

1. $(e_n \mid e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,
2. $\{f_0, \ldots, f_n\} \subset \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On aura alors trouvé une base hilbertienne car on aura $f_i \in \overline{\text{vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $H = \overline{\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \subset H$, d'où $H = \overline{\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}}$. Avec la propriété $(e_n \mid e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, ceci donne bien que $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H.

On construit maintenant la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Construction de e_0

Soit $\varphi(0) = \min\{i \in \mathbb{N}\,;\ f_i \neq 0\}$ (les f_i ne sont pas tous nuls car $H \neq \{0\}$). On prend $e_0 = \frac{f_{\varphi(0)}}{\|f_{\varphi(0)}\|}$, de sorte que $(e_0 \mid e_0) = 1$ et $f_0 \in \text{vect}\{e_0\}$ (car $f_0 = \|f_0\|e_0$, même si $\varphi(0) \neq 0$).

Construction de e_{n+1}

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose construits $e_0, \ldots, e_n$ t.q.

— $(e_p \mid e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n\}$,

— $\{f_0, \ldots, f_p\} \subset \text{vect}\{e_0, \ldots, e_p\}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$.

(Ce qui est vérifié pour $n = 0$ grâce à la construction de e_0.)

On construit maintenant e_{n+1} t.q. les deux assertions précédentes soient encore vraies avec $n+1$ au lieu de n.

Un sous espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé, donc $\overline{\text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}} = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. Si $f_i \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a alors $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ et donc $H = \overline{\text{vect}\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}} = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. Ce qui prouve que H est de dimension finie (et $\dim(H) = n+1$). Comme H est de dimension infinie, il existe donc $i \in \mathbb{N}$ t.q. $f_i \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ (dans le cas où H est dimension finie, la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(H) - 1$ et on obtient une base hilbertienne avec $\{e_0, \ldots, e_n\}$). On pose alors $\varphi(n+1) = \min\{i \in \mathbb{N}\,;\ f_i \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}\}$. On a donc, en particulier, $\varphi(n+1) \geq n+1$. En prenant $\tilde{e}_{n+1} = f_{\varphi(n+1)} - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (f_{\varphi(n+1)} \mid e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on remarque que $\tilde{e}_{n+1} \neq 0$ (car $f_{\varphi(n+1)} \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$) et que $(\tilde{e}_{n+1} \mid e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Il suffit alors de prendre $e_{n+1} = \frac{\tilde{e}_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}$ pour avoir $(e_p \mid e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n+1\}$. Enfin, il est clair que $f_{n+1} \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_{n+1}\}$ car on a $f_{n+1} = \|\tilde{e}_{n+1}\|e_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_{n+1}\}$ si $\varphi(n+1) = n+1$ et $f_{n+1} \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ si $\varphi(n+1) > n+1$.

On a donc bien trouvé e_{n+1} t.q.

— $(e_p \mid e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n+1\}$,

— $\{f_0, \ldots, f_p\} \subset \text{vect}\{e_0, \ldots, e_p\}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n+1\}$.

Ce qui conclut la construction de la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ vérifiant les deux assertions demandées. Comme cela a déjà été dit, la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est alors une base hilbertienne de H. ■

La proposition 6.62 montre donc que tout espace de Hilbert séparable, et de dimension infinie, admet une base hilbertienne dénombrable. On peut aussi démontrer la réciproque de ce résultat, c'est-à-dire que tout espace de Hilbert admettant une base hilbertienne dénombrable est séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.31). La proposition suivante s'adresse donc uniquement aux espaces de Hilbert séparables.

Proposition 6.63 *Soient* H *un espace de Hilbert sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *et* $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *une base hilbertienne de* H *(l'espace* H *est donc séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.31) et, dans ce cas, une telle base existe d'après la proposition 6.62). Alors :*

1. *(Identité de Bessel)* $\|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(u \mid e_n)|^2$, *pour tout* $u \in H$,
2. $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)e_n$, *pour tout* $u \in H$, *c'est-à-dire* $\sum_{i=0}^{n} (u \mid e_i)e_i \to u$ *dans* H, *quand* $n \to +\infty$,
3. *soient* $u \in H$ *et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ *t.q.* $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ *(c'est-à-dire* $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \to u$ *dans* H *quand* $n \to +\infty$*), alors* $\alpha_i = (u \mid e_i)$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$,
4. *(identité de Parseval)* $(u \mid v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)\overline{(v \mid e_n)}$, *pour tout* $u, v \in H$.

DÉMONSTRATION – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. F_n est donc un s.e.v. fermé de H (on a $\dim(F_n) = n + 1$ et on rappelle qu'un espace de dimension finie est toujours complet, F_n est donc fermé dans H).

On remarque que $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathrm{vect}\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et donc que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = H$ (car $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H).

Soit $u \in H$. La suite $(d(u, F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $F_n \subset F_{n+1}$), on a donc $d(u, F_n) \downarrow l$ quand $n \to +\infty$, avec $l \geq 0$. On va montrer que $l = 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tel que $d(v, u) \leq \varepsilon$ (car $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = H$) ; il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $v \in F_n$. On a alors $d(u, F_n) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $l \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien montré que $l = 0$.

On utilise maintenant le théorème d'existence et d'unicité de la projection sur un convexe fermé non vide (théorème 6.47). Il donne l'existence (et l'unicité) de $u_n = P_{F_n} u \in F_n$ t.q. $d(u_n, u) = d(u, F_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u = (u - u_n) + u_n$ et la deuxième caractérisation de la projection (proposition 6.51) donne que $(u - u_n) \in F_n^{\perp}$. Le théorème de Pythagore (théorème 6.44) donne enfin que $\|u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u - u_n\|^2$. Comme $\|u - u_n\| = d(u, u_n) = d(u, F_n) \downarrow 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.22}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in F_n = \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$, on a $u_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (u_n \mid e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ (car $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout i, j). Puis, comme $(u - u_n) \in F_n^{\perp}$, on a $(u - u_n \mid e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, d'où l'on déduit que $\alpha_i = (u \mid e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. On a donc montré que $u_n = \sum_{i=0}^{n} (u \mid e_i)e_i$, ce qui, avec le théorème de Pythagore, donne $\|u_n\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |(u \mid e_i)|^2$. On obtient donc, avec (6.22) le premier item de la proposition, c'est-à-dire l'identité de Bessel.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition. En reprenant les notations précédentes, on a, pour $u \in H$, $u = (u - u_n) + u_n$ et $(u - u_n) \to 0$ dans H quand

$n \to +\infty$ (car $\|u - u_n\| = d(u, F_n)$). On a donc $u_n \to u$ dans H quand $n \to +\infty$. Ceci donne bien le deuxième item de la proposition car on a vu que $u_n = \sum_{i=0}^{n}(u \mid e_i)e_i$.

Pour montrer le troisième item de la proposition, on suppose que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ est t.q. $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \to u$ dans H quand $n \to +\infty$. Soit $j \in \mathbb{N}$. On remarque que $(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \mid e_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (e_i \mid e_j) = \alpha_j$ pour $n \geq j$. En utilisant la continuité du produit scalaire par rapport à son premier argument (ce qui est une conséquence simple de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on en déduit (faisant $n \to +\infty$) que $(u \mid e_j) = \alpha_j$, ce qui prouve bien le troisième item de la proposition.

Enfin, pour montrer l'identité de Parseval, on utilise la continuité du produit scalaire par rapport à ses deux arguments (ce qui est aussi une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), c'est-à-dire le fait que

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to u \text{ dans H, quand } n \to +\infty, \\ v_n \to v \text{ dans H, quand } n \to +\infty, \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n \mid v_n) \to (u \mid v) \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.23}$$

Pour $u, v \in H$, on utilise (6.23) avec $u_n = \sum_{i=0}^{n}(u \mid e_i)e_i$ et $v_n = \sum_{i=0}^{n}(v \mid e_i)e_i$. On a bien $u_n \to u$ et $v_n \to v$ (d'après le deuxième item) et on conclut en remarquant que $(u_n \mid v_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (u \mid e_i)\overline{(v \mid e_j)}(e_i \mid e_j) = \sum_{i=0}^{n}(u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$. ■

Remarque 6.64 Soit H un espace de Hilbert sur K, K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, séparable et de dimension infinie.

1. Soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. On pose $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. Comme $\{e_n, n \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$, la famille $\{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est donc aussi une base hilbertienne de H. On peut donc appliquer la proposition 6.63 avec la famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou avec la famille $\{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$. Le deuxième item de la proposition 6.63 donne alors, pour tout $u \in H$,

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

   Ceci montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)e_n$ est commutativement convergente, c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans H, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris. Noter pourtant que cette série peut ne pas être absolument convergente. On peut remarquer, pour donner un exemple, que la suite $(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} e_i)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ est de Cauchy, donc converge, dans H, quand $n \to +\infty$, vers un certain u. Pour cet élément u de H, on a $(u \mid e_i) = \frac{1}{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)e_n$ est donc commutativement convergente mais n'est pas absolument convergente car $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(u \mid e_n)e_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = +\infty$ (voir à ce propos l'exercice 6.30). L'exercice 6.41 complète cet exemple en construisant une isométrie bijective naturelle entre H et l^2.

Par contre, on rappelle que, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente (voir l'exercice 2.34). On peut d'ailleurs remarquer que la série donnée à l'item 4 de la proposition 6.63 est commutativement convergente (pour la même raison que pour la série de l'item 2, donnée ci-dessus) et est aussi absolument convergente. En effet, pour $u, v \in H$, on a $|(u \mid e_i)(v \mid e_i)| \leq |(u \mid e_i)|^2 + |(v \mid e_i)|^2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui montre bien (grâce à l'identité de Bessel) que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)\overline{(v \mid e_n)}$ est absolument convergente (dans K).

2. Soit I un ensemble dénombrable (un exemple intéressant pour la suite est $I = \mathbb{Z}$) et $\{e_i,\ i \in I\} \subset H$.

   Soit $\varphi : \mathbb{N} \to I$ bijective. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. On a alors $\{e_i,\ i \in I\} = \{\tilde{e}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. La famille $\{e_i,\ i \in I\}$ est donc une base hilbertienne si et seulement si la famille $\{\tilde{e}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne.

   Si la famille $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne, on peut donc appliquer la proposition 6.63 avec la famille $\{\tilde{e}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On obtient, par exemple, que pour tout $u \in H$:
$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

   La somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}$ ne dépend donc pas du choix de la bijection φ entre $\mathbb{N}$ et I et il est alors légitime de la noter simplement $\sum_{i\in I}(u \mid e_i)e_i$. Ceci est détaillé dans la définition 6.65 et permet d'énoncer la proposition 6.66.

Définition 6.65 *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* I *un ensemble dénombrable. Soit $(u_i)_{i\in I} \subset H$. On dit que la série $\sum_{i\in I} u_i$ est commutativement convergente s'il existe $u \in H$ t.q., pour tout $\varphi : \mathbb{N} \to I$ bijective, on ait*
$$\sum_{p=0}^{n} u_{\varphi(p)} \to u, \text{ quand } n \to +\infty.$$
On note alors $u = \sum_{i\in I} u_i$.

Proposition 6.66 *Soit* H *un espace de Hilbert sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soient* I *dénombrable et $\{e_i,\ i \in I\}$ une base hilbertienne de* H *(l'espace* H *est donc séparable et de dimension infinie). Alors :*

1. *(Identité de Bessel) Pour tout $u \in H$, la série $\sum_{i\in I}|(u \mid e_i)|^2$ est commutativement convergente et $\|u\|^2 = \sum_{i\in I}|(u \mid e_i)|^2$,*
2. *Pour tout $u \in H$, la série $\sum_{i\in I}(u \mid e_i)e_i$ est commutativement convergente et $u = \sum_{i\in I}(u \mid e_i)e_i$,*

3. *soient* $u \in \mathrm{H}$ *et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{K}$ *tels que la série* $\sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i e_i$ *est commutativement convergente et* $u = \sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i e_i$, *alors* $\alpha_i = (u \mid e_i)$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$,
4. *(identité de Parseval) Pour tous* $u, v \in \mathrm{H}$, *la série* $\sum_{i\in\mathrm{I}} (u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$ *est commutativement convergente et* $(u \mid v) = \sum_{i\in\mathrm{I}} (u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est immédiate à partir de la proposition 6.63 et de la définition des séries commutativement convergentes (définition 6.65). Il suffit de remarquer que $\{e_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{I}$ bijective (et d'appliquer la proposition 6.63), comme cela est indiqué dans la remarque 6.64 (deuxième item). ■

La proposition suivante donne une caractérisation très utile des bases hilbertiennes.

Proposition 6.67 (Caractérisation des bases hilbertiennes) *Soit* H *un espace de Hilbert réel ou complexe. Soit* $\{e_i, i \in \mathrm{I}\} \subset \mathrm{H}$ *t.q.* $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$ *pour tout* $i, j \in \mathrm{I}$. *Alors,* $\{e_i, i \in \mathrm{I}\}$ *est une base hilbertienne si et seulement si :*

$$u \in \mathrm{H},\ (u \mid e_i) = 0\,\forall i \in \mathrm{I} \Rightarrow u = 0.$$

DÉMONSTRATION – On pose $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\{e_i, i \in \mathrm{I}\}$. F est s.e.v. de H.

On sait que $\{e_i, i \in \mathrm{I}\}$ est une base hilbertienne si et seulement si $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{H}$. Or, on a déjà vu (proposition 6.54) que $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{H} \Leftrightarrow \mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Donc, $\{e_i, i \in \mathrm{I}\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in \mathrm{H}, u \in \mathrm{F}^\perp \Rightarrow u = 0.$$

Comme $u \in \mathrm{F}^\perp$ si et seulement si $(u \mid e_i) = 0$ pour tout $i \in \mathrm{I}$, on en déduit que $\{e_i, i \in \mathrm{I}\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in \mathrm{H},\ (u \mid e_i) = 0\,\forall i \in \mathrm{I} \Rightarrow u = 0.$$

■

On donne maintenant un exemple de base hilbertienne, cet exemple donne un résultat de convergence de la série de Fourier d'une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour cet exemple, on prend $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(]0, 2\pi[, \mathcal{B}(]0, 2\pi[), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]0, 2\pi[)$. On rappelle que H est un espace de Hilbert complexe et que le produit scalaire sur H est donné par $(f \mid g)_2 = \int f\overline{g}d\lambda = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$ pour $f, g \in \mathrm{H}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n \in \mathrm{H}$ par (en confondant e_n avec son représentant continu) :

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx),\ x \in]0, 2\pi[. \tag{6.24}$$

La convergence dans H de la série de Fourier de $f \in H$ est alors donnée par la proposition suivante (noter que cette proposition ne donne pas de convergence ponctuelle de la série de Fourier, même si f est continue).

Proposition 6.68 (Séries de Fourier) *Soit* $H = L^2_{\mathbb{C}}(]0,2\pi[,\mathcal{B}(]0,2\pi[),\lambda)$. *Alors :*

1. La famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, *où* e_n *est donnée par (6.24), est une base hilbertienne de* H.

2. Pour tout $f \in H$, *la série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f \mid e_n)_2 e_n$ *est commutativement convergente et*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f \mid e_n)_2 e_n.$$

En particulier, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n}(f \mid e_p)_2 e_p(x)|^2 dx \to 0,\ \textit{quand}\ n \to +\infty.$$

DÉMONSTRATION – Pour démontrer que $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne, on utilise la proposition 6.67. Il suffit donc de montrer :

1. $(e_n \mid e_m)_2 = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,
2. $f \in H$, $(f \mid e_n)_2 = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

L'assertion 1 est immédiate car $(e_n \mid e_m)_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\exp(i(n-m)x)dx$. Ce qui donne bien 0 si $n \neq m$ et 1 si $n = m$.

Pour montrer l'assertion 2, soit $f \in H$ t.q. $(f \mid e_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On va montrer que $f = 0$ (c'est-à-dire $f = 0$ p.p.) en raisonnant en plusieurs étapes.

Etape 1. On note $P = \text{vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ (P est donc l'ensemble des polynômes trigonométriques). Par anti–linéarité du produit scalaire de H par rapport à son deuxième argument, on a $(f \mid g) = 0$ pour tout $g \in P$.

Etape 2. On note $C_p = \{g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})\,;\ g(0) = g(2\pi)\}$. On peut montrer que P est dense dans C_p pour la norme de la convergence uniforme (définie par $\|g\|_u = \max\{g(x), x \in [0,2\pi]\}$). On admet ce résultat ici (c'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass). Soit $g \in C_p$, il existe donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P$ t.q. $g_n \to g$ uniformément sur $[0,2\pi]$. On a donc $\|g_n - g\|_u = \|g_n - g\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. Comme $\lambda([0,2\pi]) < +\infty$, on en déduit que $\|g_n - g\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$. (Plus précisément, on a ici $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_\infty$). Comme $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par l'étape 1), on en déduit (avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que $(f \mid g)_2 = 0$. On a donc $(f \mid g)_2 = 0$ pour tout $g \in C_p$.

Etape 3. Soit $g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit g_n par :

$$\begin{aligned} &g_n(x) = g(x),\ \text{si}\ x \in [\tfrac{1}{n}, 2\pi], \\ &g_n(x) = g(2\pi) + (g(\tfrac{1}{n}) - g(2\pi))(nx),\ \text{si}\ x \in [0, \tfrac{1}{n}[, \end{aligned}$$

de sorte que $g_n \in C_p$ (noter que g_n est affine entre 0 et $\frac{1}{n}$ et vérifie $g_n(0) = g(2\pi)$ et $g_n(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$).

Par l'étape 2, on a $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, le théorème de convergence dominée dans L^p donne que $g_n \to g$ dans H quand $n \to +\infty$ (noter en effet que $g_n \to g$ p.p. et que $g_n \le \|g\|_\infty \in H$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On en déduit donc que $(f \mid g)_2 = 0$. On a donc $(f \mid g)_2 = 0$ pour tout $g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$.

Etape 4. On prend maintenant $g \in H = L^2_{\mathbb{C}}(]0,2\pi[,\mathcal{B}(]0,2\pi[),\lambda)$. On définit $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $\tilde{g} = g$ sur $[0,2\pi]$ et $\tilde{g} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus[0,2\pi]$. On obtient ainsi $\tilde{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (On a, comme d'habitude, confondu un élément de L^2 avec l'un de ses représentants ; et λ désigne maintenant la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On montre dans l'exercice (corrigé) 6.5 que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On en déduit facilement que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Il existe donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ t.q. $h_n \to \tilde{g}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, quand $n \to +\infty$. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |h_n(x) - g(x)|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}} |h_n(x) - \tilde{g}(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

En posant $g_n = (h_n)_{|[0,2\pi]}$, on a donc $g_n \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $g_n \to g$ dans H, quand $n \to +\infty$. Comme l'étape 3 donne $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(f \mid g)_2 = 0$.

Pour conclure, il suffit maintenant de prendre $g = f$. On obtient $(f \mid f)_2 = 0$ et donc $f = 0$ p.p..

On a bien ainsi montré (grâce à la proposition 6.67) que $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition.

Soit $f \in H$. La proposition 6.66 donne que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f \mid e_n)_2 e_n$ est commutativement convergente et que

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \mid e_n)_2 e_n.$$

En utilisant la définition 6.65 et la bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ donnée par $\varphi(0) = 0$, et, pour $n \ge 1$, $\varphi(2n-1) = n$, $\varphi(2n) = -n$, on a donc, en particulier, $\sum_{i=0}^{m}(f \mid e_{\varphi(m)})_2 e_{\varphi(m)} \to f$, dans H, quand $m \to \infty$. En prenant $m = 2n$, ceci donne exactement

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n} (f \mid e_p) e_p(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

■

6.3 Dualité dans les espaces L^p, $1 \le p \le \infty$

6.3.1 Dualité pour $p = 2$

Soit (E,T,m) un espace mesuré. On note $H = L^2_K(E,T,m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in L^2_K(E,T,m)$. On note $\varphi_f : H \to K$, l'application définie par $\varphi_f(g) = (g \mid f)_2$. On a déjà vu (remarque 6.38) que $\varphi_f \in H'$ (dual topologique de H). On remarque aussi que $\|\varphi_f\|_{H'} = \|f\|_H = \|f\|_2$. En effet $|\varphi_f(g)| \le \|f\|_H\|g\|_H$ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)et $|\varphi_f(f)| = \|f\|_H^2$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{H'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_H},\ g \in H \setminus \{0\}\} = \|f\|_H.$$

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56 page 331) appliqué à l'espace de Hilbert $H = L^2_K(E,T,m)$ donne que pour tout $T \in H'$, il existe un et un seul $f \in H$ t.q. $T(g) = (g \mid f)_2$ pour tout $g \in H$, c'est-à-dire un et un seul $f \in H$ t.q. $T = \varphi_f$.

L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$ est donc une isométrie bijective de $L^2_K(E,T,m)$ sur $L^2_K(E,T,m)$. (Noter que φ est linéaire si $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $K = \mathbb{C}$.)

Cette situation est spécifique au cas $p = 2$. Nous examinons ci-après le cas général $1 \le p \le \infty$.

6.3.2 Dualité pour $1 \le p \le \infty$

Soit (E,T,m) un espace mesuré. Soit $p \in [1,+\infty]$, on pose $q = \frac{p}{p-1} \in [1,+\infty]$ (de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, q s'appelle le conjugué de p). Dans toute cette section, on note $L^r_K = L^r_K(E,T,m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (et $r \in [1,\infty]$).

On cherche à caractériser le dual de L^p_K, de manière semblable à ce qui a été fait à la section précédente dans le cas $p = 2$.

Soit $f \in L^q_K$, on considère l'application :

$$\varphi_f : g \mapsto \begin{cases} \int g f \, dm \text{ si } K = \mathbb{R}, \\ \int g \overline{f} \, dm \text{ si } K = \mathbb{C}. \end{cases} \tag{6.25}$$

L'inégalité de Hölder (proposition 6.26) montre que $\varphi_f(g)$ est bien définie si $g \in L^p_K$ et que φ_f est continue ; donc $\varphi_f \in (L^p_K)'$ (dual topologique de L^p_K). On peut aussi obtenir un majorant de la norme de φ_f car l'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_f(g)| \le \|f\|_q \|g\|_p, \text{ pour tout } g \in L^p_K,$$

d'où l'on déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \sup\left\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p},\ g \in L^p_K \setminus \{0\}\right\} \le \|f\|_q. \tag{6.26}$$

On définit donc une application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$ de $\mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$ dans $(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$. La définition de φ_f (formule (6.25)) montre que cette application est linéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. Elle est toujours continue, grâce à (6.26). On montre maintenant que c'est, en général, une isométrie.

Proposition 6.69 (Injection de L^q dans $(\mathrm{L}^p)'$) *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Si $p = 1$, la mesure m est supposée de plus σ-finie. L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.25) est une application de $\mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$ dans $(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$, linéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. De plus, c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$. (L'application φ est donc nécessairement injective, mais pas forcément surjective.)*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que φ est une application de $\mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$ dans $(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$, linéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. On sait aussi que $\|\varphi_f\|_{(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'} \leq \|f\|_q$ pour tout $f \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$ (voir (6.26)). Pour terminer la démonstration de cette proposition, Il suffit donc de montrer que, pour tout $f \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$,

$$\|\varphi_f\|_{(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'} \geq \|f\|_q. \tag{6.27}$$

On se limite au cas $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ (les adaptations pour traiter le cas $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ sont faciles à deviner).

Soit $f \in \mathrm{L}^q_{\mathbb{R}}$. On suppose $f \neq 0$ (sinon (6.27) est immédiat). On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^q = \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Pour montrer 6.27, on va chercher $g \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{K}} \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q$.

On distingue maintenant trois cas.

Cas 1 : $1 < p < \infty$**.** On définit $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|^{q-1}\mathrm{sign}(f(x))$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, avec la fonction sign $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\mathrm{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\mathrm{sign}(0) = 0$. La fonction g est mesurable (comme composée d'applications mesurables) et on a (en notant que $p = \frac{q}{q-1}$) :

$$\int |g|^p dm = \int (|f|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} dm = \int |f|^q dm < \infty.$$

Donc, $g \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}$ (plus précisément, $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$) et $\|g\|_p = \|f\|_q^{\frac{q}{p}} \neq 0$. Pour ce choix de g, on a donc

$$\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \int fg dm = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \|f\|_q^q = \|f\|_q,$$

car $q - \frac{q}{p} = 1$.

On en déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(h)|}{\|h\|_p}, h \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{K}} \setminus \{0\}\} \geq \frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q,$$

ce qui donne (6.27).

Cas 2 : $p = \infty$**.** On a, dans ce cas, $q = 1$. On prend, comme pour le premier cas, $g = \text{sign}(f)$. On a ici $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ et $\|g\|_\infty = 1$ (car $m(E) \neq 0$, sinon $L^1_{\mathbb{R}} = \{0\}$ et il n'y a pas de $f \in L^1_{\mathbb{R}}$, $f \neq 0$). Pour ce choix de g, on a $\varphi_f(g) = \|f\|_1$, donc $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_\infty} = \|f\|_1$ et, comme dans le premier cas, ceci donne (6.27).

Cas 3 : $p = 1$**.** On a, dans ce cas, $q = \infty$. Ce cas est un peu plus délicat que les précédents. On ne peut pas toujours trouver $g \in L^1_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_1} = \|f\|_\infty$. En utilisant le caractère σ-fini de m, on va, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $g_n \in L^1_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g\|_1} \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$, ce qui permet aussi de montrer (6.27).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$ et $A_n = \{|f| \geq \alpha_n\}$. On a $m(A_n) > 0$ (car $m(A_n) = 0$ donnerait $\|f\|_\infty \leq \alpha_n$).

Si $m(A_n) < \infty$, on peut prendre $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n}$ qui est mesurable (car $\text{sign}(f)$ et 1_{A_n} sont mesurables) et intégrable car $m(A_n) < \infty$. On a alors $g_n \in L^1_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n)$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n} |f| dm \geq \alpha_n m(A_n)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L^1_K)'} \geq \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \geq \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.27).

Si $m(A_n) = \infty$, le choix de $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n}$ ne convient pas car $\text{sign}(f)1_{A_n} \notin L^1_{\mathbb{R}}$. On utilise alors le fait que m est σ-finie. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_p) < \infty$, $E_p \subset E_{p+1}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} E_p$. Par continuité croissante de m, on a donc $m(A_n \cap E_p) \uparrow m(A_n)$ quand $p \to \infty$. Comme $m(A_n) > 0$ il existe donc $p \in \mathbb{N}$ (dépendant de n, on ne note pas cette dépendance) t.q. $m(A_n \cap E_p) > 0$. On prend alors $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n\cap E_p}$. On a bien alors $g_n \in L^1_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n \cap E_p) \leq m(E_p) < \infty$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n\cap E_p} |f| dm \geq \alpha_n m(A_n \cap E_p)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L^1_K)'} \geq \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \geq \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.27), ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

La proposition 6.69 montre que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.25) est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. De plus, c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$. Comme cela a déjà été dit, l'application φ est donc nécessairement injective car $\varphi_f = \varphi_h$ implique $\varphi_{f-h} = 0$ et donc $\|f - h\|_q = \|\varphi_{f-h}\|_{(L^p_K)'} = 0$, ce qui donne $f = h$ p.p.. Mais l'application φ n'est pas forcément surjective. On sait qu'elle est surjective si $p = 2$ (c'est l'objet de la section précédente). Le théorème suivant montre qu'elle est surjective si m est σ-finie et $p \in [1, +\infty[$ (de sorte qu'on identifie souvent, dans ce cas, $(L^p_K)'$ à L^q_K).

Théorème 6.70 (Dualité $L^p - L^q$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré* σ*-fini,* $1 \leq p < +\infty$*,* $q = \frac{p}{p-1}$ *et* $T \in (L^p_K)'$*. Alors, il existe un unique* $f \in L^q_K$ *t.q.*

$$T(g) = \begin{cases} \int g f \, dm & \text{si } K = \mathbb{R}, \\ \int g \overline{f} \, dm & \text{si } K = \mathbb{C}, \end{cases}$$

c'est-à-dire telle que $T = \varphi_f$ *avec* φ *donné par (6.25) (on a donc montré la surjectivité de l'application* $\varphi : L^q_K \to (L^p_K)'$ *définie par* $\varphi(f) = \varphi_f$ *pour* $f \in L^q_K$*).*

Remarque 6.71 (Dual de L^∞) Noter que le théorème précédent est, en général, faux pour $p = +\infty$. L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25) est donc une isométrie (linéaire ou antilinéaire, selon que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de L^1_K dans $(L^\infty_K)'$ mais l'image de φ est, sauf cas très particuliers, différente de $(L^\infty_K)'$. L'application φ ne permet donc pas d'identifier le dual de L^∞_K à L^1_K.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME *6.70* La démonstration de ce théorème est faite dans l'exercice 6.51. Elle consiste essentiellement à se ramener directement à appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) dans un espace L^2 approprié.

Une autre démonstration, probablement plus classique, consiste à appliquer le théorème de Radon-Nikodym, qui lui-même se démontre en se ramenant au théorème de représentation de Riesz. Cette démonstration est donnée, dans le cas particulier $p = 1$, dans l'exercice 6.49. Nous verrons le théorème de Radon-Nikodym dans la section suivante, voir les théorèmes 6.78 et 6.79.

Enfin, on propose dans l'exercice 6.50 une autre démonstration de ce théorème dans le cas $p < 2$ (utilisant toujours le théorème de représentation de Riesz). ■

Une conséquence intéressante du théorème de dualité (théorème 6.70) est le caractère réflexif des espaces L^p pour $1 < p < +\infty$, ce que l'on détaille maintenant.

Soit F un espace de Banach réel (mais il est possible de traiter aussi les Banach complexes). On note F' le dual (topologique) de F et F'' le dual (topologique) de F'. On dit aussi que F'' est le bidual de F. Pour $u \in F$, on définit $J_u : F' \to \mathbb{R}$ par

$$J_u(T) = T(u) \text{ pour tout } T \in F'. \tag{6.28}$$

Il est facile de voir que $J_u \in F''$ et $\|J_u\|_{F''} \leq \|u\|_F$. On peut en fait montrer que $\|J_u\|_{F''} = \|u\|_F$ (c'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach, non démontré ici). Comme l'application $J : u \mapsto J_u$ est linéaire, c'est donc une isométrie linéaire de F dans F''. Il est alors immédiat que J est injective. Par contre, J n'est pas toujours surjective. L'application J est souvent appelée injection canonique de F dans F'', ce qui sous-entend une identification de F comme sous–espace de F''. En fait, l'injection canonique d'un ensemble A contenu dans un ensemble B est l'application qui a tout élément de A associe lui–même : c'est la restriction de l'identité à A, qui permet de voir l'inclusion en terme d'application.

Définition 6.72 (Espace réflexif) *Soit* F *un espace de Banach,* F' *son dual (topologique) et* F'' *son bidual (c'est-à-dire le dual topologique de* F'*). Pour* $u \in F$*, on définit* $J_u \in F''$ *par (6.28). On dit que l'espace* F *est réflexif si l'application* $J : u \mapsto J_u$ *(de* F *dans* F''*) est surjective (l'application* J *est toujours injective).*

Un espace de Hilbert H est toujours réflexif car l'application J est alors simplement la composée des deux bijections de H dans H' et de H' dans H'' données par le théorème de représentation de Riesz (Théorème 6.56), ce qui montre que J est surjective. L'espace $L^2_R(E,T,m)$ est donc réflexif. Plus généralement, une conséquence directe du théorème 6.70 est que les espaces L^p, sont réflexifs pour $p \in]1,+\infty[$.

Proposition 6.73 *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* $1 < p < +\infty$*. Alors, l'espace* $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *est réflexif.*

Démonstration – On pose $q = \frac{p}{p-1}$, $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $L^q = L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

On note Φ l'application de L^p dans $(L^q)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25), et on note Ψ l'application de L^q dans $(L^p)'$ définie par $\Psi(f) = \varphi_f$.

Comme $p \neq +\infty$ et $q \neq +\infty$, le théorème 6.70 donne que Φ est une bijection de L^p dans $(L^q)'$ et Ψ est une bijection de L^q dans $(L^p)'$. On rappelle aussi que Φ et Ψ sont des isométries linéaires.

Soit $s \in (L^p)''$. Pour montrer que L^p est réflexif, il suffit de montrer qu'il existe $u \in L^p$ t.q. $J_u = s$ (où J_u est défini par 6.28), c'est-à-dire t.q. $s(T) = T(u)$ pour tout $T \in (L^p)'$.

On va montrer que $u = \Phi^{-1}(s \circ \Psi)$ convient. En effet, soit $T \in (L^p)'$. On a :

$$T(u) = \int u\Psi^{-1}(T)dm,$$

et :

$$s(T) = (s \circ \Psi)(\Psi^{-1}(T)) = \Phi(u)(\Psi^{-1}(T)) = \int u\Psi^{-1}(T)dm = T(u).$$

On a donc bien montré que l'application $J : u \mapsto J_u$ (de L^p dans $(L^p)''$) est surjective, c'est-à-dire que L^p est réflexif.

On peut aussi noter que la démonstration de cette proposition donne en fait que $J_u = \Phi(u) \circ \Psi^{-1}$ pour tout $u \in L^p$. ■

6.3.3 Théorème de Radon-Nikodym

La définition 4.21 donnait la définition d'une mesure de densité. On reprend ici cette définition et on donne aussi la définition de mesure signée de densité.

Définition 6.74 (Mesure de densité) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. *Soit* μ *une mesure sur* T. *On dit que* μ *est une mesure de densité par rapport à* m *si il existe* $f \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $\mu(A) = \int_A f dm$, *pour tout* $A \in T$. *On pose alors* $\mu = fm$ *(on dit aussi que* f *est la densité de* μ *par rapport à* m*).*
2. *Soit* μ *une mesure signée sur* T. *On dit que* μ *est une mesure signée de densité par rapport à* m *si il existe* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $\mu(A) = \int_A f dm$, *pour tout* $A \in T$. *On pose alors* $\mu = fm$ *(on dit aussi que* f *est la densité de* μ *par rapport à* m*).*

Remarque 6.75 (Sur les mesures de densité) Soient (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure sur T.

1. (Unicité de la densité) Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$. On suppose que $\mu = fm$ et $\mu = gm$. On a alors $f = g$ m-p.p.. En effet, on doit avoir $\int_A f dm = \int_A g dm$ pour tout $A \in T$. En choisissant $A = \{f > g\}$ puis $A = \{f < g\}$, on en déduit que $\int_{\{f>g\}} (f - g) dm + \int_{\{f<g\}} (g - f) dm = 0$, ce qui donne $\int |f - g| dm = 0$ et donc $f = g$ m-p.p..
2. (Espace $\mathcal{L}^1$ pour une mesure de densité) Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu = fm$. Soit $g \in \mathcal{M}$, l'exercice (corrigé) 4.26 donne alors les assertions suivantes :
   (a) $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \Leftrightarrow fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,
   (b) $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \Rightarrow \int g d\mu = \int fg dm$.
3. (Absolue continuité d'une mesure de densité) Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu = fm$. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a alors $f 1_A = 0$ m-p.p. et donc $\mu(A) = \int f 1_A dm = 0$. Selon la définition 6.76 ci-après, ceci montre que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m. L'objectif du théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78) sera de démontrer la réciproque de ce résultat (si μ est finie et m est σ-finie).

Rappelons la définition d'une mesure absolument continue :

Définition 6.76 (Mesure absolument continue) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* μ *une mesure (positive ou signée) sur* T. *On dit que* μ *est absolument continue par rapport à* m*, et on note* $\mu << m$*, si :*

$$A \in T, m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Remarque 6.77 *On donne ici un exemple de mesure non absolument continue : on prend* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $\mu = \delta_0$ *(mesure de Dirac en* 0 *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*). Comme*

$\lambda(\{0\}) = 0$ *et* $\delta_0(\{0\}) = 1$*, la mesure* δ_0 *n'est pas absolument continue par rapport à* λ.

On donne maintenant le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures (positives).

Théorème 6.78 (Radon-Nikodym) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré* σ*-fini et* μ *une mesure finie sur* T*. Alors,* μ *est absolument continue par rapport à* m *si et seulement si* μ *est une mesure de densité par rapport à* m*.*

DÉMONSTRATION – **Sens ($\Leftarrow$).** Ce sens a été montré dans le troisième item de la remarque 6.75 (et les hypothèses "μ finie" et "m σ-finie" sont inutiles. (Noter aussi que le premier item de cette même remarque donne l'unicité m-p.p. de la densité de μ par rapport à m.)

Sens ($\Rightarrow$). Pour toute mesure ν sur T et pour tout $1 \le p \le +\infty$, on note $\mathcal{L}^p(\nu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, \nu)$ et $L^p(\nu) = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, \nu)$.

Pour démontrer que μ est une mesure de densité par rapport à m, on va appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mu + m)$.

On rappelle d'abord que l'exercice (corrigé) 4.2 donne que $\mu + m$ est une mesure sur T (définie par $(\mu + m)(A) = \mu(A) + m(A)$ pour tout $A \in T$) et que les deux propriétés suivantes sont vérifiées (questions 1 et 2 de l'exercice 4.2) :

$$g \in \mathcal{L}^1(\mu + m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(m),$$
$$g \in \mathcal{L}^1(\mu + m) \Rightarrow \int g d(\mu + m) = \int g d\mu + \int g dm. \tag{6.29}$$

Il est aussi clair que $\int f d(\mu + m) = \int f d\mu + \int f dm$ pour tout $f \in \mathcal{M}_+$ (voir l'exercice 4.2). Pour $g \in \mathcal{M}$, on a donc $\int g^2 d(\mu+m) = \int g^2 d\mu + \int g^2 dm$, ce qui donne $\mathcal{L}^2(\mu+m) = \mathcal{L}^2(\mu) \cap \mathcal{L}^2(m)$.

Enfin, pour $A \in T$, on a $(\mu + m)(A) = 0$ si et seulement si $\mu(A) = m(A) = 0$. On a donc, pour $f, g : E \to \mathbb{R}$:

$$f = g \ (\mu + m)\text{-p.p.} \Leftrightarrow \begin{cases} f = g \ \mu\text{-p.p.}, \\ f = g \ m\text{-p.p.}. \end{cases}$$

On décompose maintenant la démonstration en trois étapes.

Etape 1. Utilisation du théorème de Riesz.

On pose $H = L^2(\mu + m)$ (H est donc un espace de Hilbert). On veut définir $T : H \to \mathbb{R}$ par :

$$T(g) = \int g d\mu \text{ pour tout } g \in H. \tag{6.30}$$

On montre tout d'abord que cette définition est correcte. Soit $g \in H = L^2(\mu + m)$. On choisit un représentant de g, encore noté g, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2(\mu+m) = \mathcal{L}^2(\mu) \cap L^2(m)$. Comme μ est finie, on a $\mathcal{L}^2(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Donc $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int g d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R}$. Puis, on remarque que $\int g d\mu$ ne dépend pas du représentant choisi car $g_1 = g_2$ $(\mu + m)$-p.p. implique $g_1 = g_2$ μ-p.p.. L'application T est donc bien définie de H dans $\mathbb{R}$ par (6.30).

On montre maintenant que $T \in H'$. Il est immédiat que T est linéaire. On remarque ensuite que, pour tout $g \in H$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec g et 1_E, $|T(g)| = |\int g d\mu| \le \|g\|_{L^2(\mu)}\sqrt{\mu(E)} \le \|g\|_{L^2(\mu+m)}\sqrt{\mu(E)}) = \|g\|_H\sqrt{\mu(E)}$. On a donc $T \in H'$ (et $\|T\|_{H'} \le \sqrt{\mu(E)}$).

On peut maintenant appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56). Il donne qu'il existe $\varphi \in H = L^2(\mu + m)$ t.q. $T(g) = \int g\varphi d(\mu + m)$ pour tout $g \in L^2(\mu+m)$. On choisit un représentant de φ, encore noté φ. On a alors $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$ et

$$\int g d\mu = \int g\varphi d(\mu + m) \text{ pour tout } g \in \mathcal{L}^2(\mu + m). \tag{6.31}$$

Pour $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$, on a $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu + m)$ et donc $\int g\varphi d(\mu + m) = \int g\varphi d\mu + \int g\varphi dm$ (d'après (6.29)). On déduit donc de (6.31) :

$$\int g(1-\varphi) d\mu = \int g\varphi dm, \text{ pour tout } g \in \mathcal{L}^2(\mu + m). \tag{6.32}$$

Etape 2. On cherche dans cette étape des bornes sur φ.

On montre tout d'abord que $\varphi \ge 0$ m-p.p. et μ-p.p. (ce qui est équivalent a dire que $\varphi \ge 0$ $(\mu + m)$-p.p.).

Comme m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{\varphi < 0\} \cap A_n \in T$. Dans (6.32), on prend $g = 1_{B_n}$ (on a bien $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ car $(\mu + m)(B_n) \le \mu(E) + m(A_n) < \infty$). On obtient

$$\int (1-\varphi)1_{B_n} d\mu = \int \varphi 1_{B_n} dm.$$

Comme $(1-\varphi) > 0$ et $\varphi < 0$ sur B_n, on en déduit que $(1-\varphi)1_{B_n} = 0$ μ-p.p. et $\varphi 1_{B_n} = 0$ m-p.p. et donc $\mu(B_n) = m(B_n) = 0$.

Par σ-additivité d'une mesure, comme $\{\varphi < 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, on en déduit $(\mu + m)(\{\varphi < 0\}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(\mu + m)(B_n) = 0$ et donc $\varphi \ge 0$ $(\mu + m)$-p.p..

On montre maintenant que $\varphi < 1$ $(\mu + m)$-p.p..

On prend dans (6.32) $g = 1_{C_n}$, avec $C_n = \{\varphi \ge 1\} \cap A_n$ (on a bien $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ car $(\mu + m)(C_n) \le \mu(E) + m(A_n) < \infty$). On obtient

$$\int (1-\varphi)1_{C_n} d\mu = \int \varphi 1_{C_n} dm.$$

Comme $(1-\varphi) \le 0$ et $\varphi > 0$ sur C_n, on en déduit que $(1-\varphi)1_{C_n} = 0$ μ-p.p. et $\varphi 1_{C_n} = 0$ m-p.p. et donc $m(C_n) = 0$. Mais on ne peut en déduire $\mu(C_n) = 0$ (car on a seulement $(1-\varphi) \le 0$ sur C_n et non $(1-\varphi) < 0$). C'est ici (et seulement ici) qu'on utilise l'hypothèse d'absolue continuité de μ par rapport à m. Comme $m(C_n) = 0$, l'hypothèse $\mu << m$ donne $\mu(C_n) = 0$. Comme $\{\varphi \ge 1\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, on en déduit $(\mu + m)(\{\varphi \ge 1\}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(\mu + m)(C_n) = 0$ et donc $\varphi < 1$ $(\mu + m)$-p.p..

On a donc montré que $0 \le \varphi < 1$ $(\mu+m)$-p.p.. En changeant φ sur un ensemble de mesure $(\mu+m)$ nulle, on peut donc supposer $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$. On a toujours $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$ et (6.32) reste vraie.

Etape 3. On montre maintenant que $\mu = fm$ avec $f = \frac{\varphi}{1-\varphi}$.

On montre tout d'abord que (6.32) est vraie pour tout $g \in \mathcal{M}_+$:

— On remarque d'abord que (6.32) est vraie si $g = 1_A$ avec $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ car, dans ce cas, $g \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$.

— On suppose maintenant que $A \in T$. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_n) < \infty$, $E_n \subset E_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On prend $g_n = 1_{B_n}$ avec $B_n = A \cap E_n$, de sorte que $g_n \uparrow 1_A$ et donc $(1-\varphi)g_n \uparrow (1-\varphi)1_A$ et $\varphi g_n \uparrow \varphi 1_A$. Comme (6.32) est vraie pour $g = g_n$ (car $m(B_n) < \infty$), le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) appliqué aux mesures μ et m donne (6.32) pour $g = 1_A$.

— Si $g \in \mathcal{E}_+$, il est alors facile de montrer que (6.32) est vraie. C'est une conséquence immédiate de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$.

— On prend enfin $g \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $g_n \uparrow g$. On a donc $(1-\varphi)g_n \uparrow (1-\varphi)g$ et $\varphi g_n \uparrow \varphi g$. On écrit (6.32) pour g_n au lieu de g. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) appliqué aux mesures μ et m donne (6.32) pour g.

On a donc maintenant φ mesurable, $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$ et (6.32) pour tout $g \in \mathcal{M}_+$.

Soit $h \in \mathcal{M}_+$. On pose $g = \frac{h}{1-\varphi}$. On a $g \in \mathcal{M}_+$ (car $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$). (6.32) donne alors

$$\int h d\mu = \int h \frac{\varphi}{1-\varphi} dm. \tag{6.33}$$

En posant $f = \frac{\varphi}{1-\varphi}$, on a $f \in \mathcal{M}_+$ et (6.33) avec $h = 1_A$ donne $\mu(A) = \int f 1_A dm$ pour tout $A \in T$, c'est-à-dire $\mu = fm$. ∎

Théorème 6.79 (Radon-Nikodym, mesures signées) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et soit* μ *une mesure signée sur* T*, alors :*

$$\mu << m \Longleftrightarrow \exists f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \;\; \mu = fm.$$

La démonstration n'est pas détaillée ici, elle consiste essentiellement à se ramener au théorème 6.78 en décomposant μ sous la forme $\mu = \mu_+ - \mu_-$ comme cela est fait dans la proposition 2.33.

6.4 Convergence faible, faible-$*$, étroite, en loi

6.4.1 Convergence faible et faible-$*$

On limite ce paragraphe au cas des espaces de Banach réels. L'extension au cas des Banach complexes ne pose de difficulté importante.

On rappelle que si F est un espace de Banach (réel) on note F′ son dual topologique (F est donc l'ensemble des applications linéaires continues de F dans $\mathbb{R}$). Si $\|\cdot\|_F$ est la norme dans F, l'ensemble F′ est aussi un espace de Banach avec la norme définie par

$$\|T\|_{F'} = \sup\left\{\frac{T(u)}{\|u\|_F}, u \in F \setminus \{0\}\right\}.$$

Définition 6.80 (Convergence faible dans un espace de Banach) *Soit* F *un espace de Banach (réel) et* F′ *son dual topologique. On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers u (dans* F*, quand* $n \to +\infty$*) si pour tout élément* T *de* F′*, on a :*

$$T(u_n) \to T(u) \text{ (dans } \mathbb{R}) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Par le théorème 6.70, on a donc la proposition suivante sur la convergence faible dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $1 \le p < +\infty$:

Proposition 6.81 (Convergence faible dans L^p) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré,* $p \in [1, +\infty[$ *et q le conjugué de p,* $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ *et* $f \in L^p$*. Alors, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* f *si et seulement si on a,*

$$\forall g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m), \int f_n g dm \to \int f g dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

.

Démonstration – On note Φ l'application de L^q dans $(L^p)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25), la démonstration de cette proposition est alors immédiate quand on remarque que le théorème 6.70 donne que Φ est une bijection de L^q dans $(L^p)'$. ■

Définition 6.82 (Convergence faible $*$ dans le dual d'un espace de Banach) *Soit* F *un espace de Banach (réel) et* F′ *son dual topologique ; soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ *et* $T \in F'$*. On dit que la suite* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* T *$*$-faiblement dans* F′ *si pour tout élément u de* F *on a :* $T_n(u) \to T(u)$ *(dans* $\mathbb{R}$*) quand* $n \to +\infty$*.*

La proposition 8.19 du chapitre 8 montre que d'une suite bornée du dual d'un espace de Banach séparable on peut extraire une sous-suite $*$-faiblement convergente. De cette proposition 8.19, on peut alors déduire que de toute suite bornée du dual d'un espace de Hilbert, ou d'un espace de Banach réflexif, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Remarque 6.83 (Convergence forte, faible et faible $*$) Soit F un espace de Banach (réel).

1. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. Les implications suivantes sont alors immédiates :

$$T_n \to T \Rightarrow T_n \to T \text{ faiblement } \Rightarrow T_n \to T \text{ $*$-faiblement.}$$

   La deuxième implication est une conséquence de l'injection de F dans F'' (construite avec (6.28)).

2. Pour $u \in F$, on définit $J_u \in F''$ avec (6.28). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $u \in F$. On a alors :

$$u_n \to u \text{ faiblement dans F} \Leftrightarrow J_{u_n} \to J_u \text{ $*$-faiblement dans } F''.$$

   Mais, si F n'est pas réflexif, l'application $J : u \mapsto J_u$, de F dans F'', n'est pas surjective et on peut avoir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non faiblement convergente dans F alors que la suite $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $*$-faiblement convergente dans F''. Dans ce cas, la limite $*$-faible (dans F'') de $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de F'' qui n'appartient pas à l'image de J.

Dans le cas où F est un espace de Banach réflexif, l'application $J : u \mapsto J_u$ est surjective de F dans F'' et on a alors :

1. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. Alors :

$$T_n \to T \text{ faiblement dans } F' \Leftrightarrow T_n \to T \text{ $*$-faiblement dans } F'.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente dans F si et seulement si la suite $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $*$-faiblement convergente dans F''.

Remarque 6.84 (Lemme de Mazur) Soit E un espace de Banach réel, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $u \in E$. Il est clair que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E vers u implique la convergence faible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u dans E. La réciproque est vraie si E est de dimension finie. La réciproque est en générale fausse si E est de dimension infinie. Elle est vraie dans quelques cas, comme, par exemple, si E est l'ensemble des séries (indexées par $\mathbb{N}$) absolument convergentes, l'espace E étant alors muni de sa norme naturelle (voir l'exercice 6.58). Il est par contre parfois intéressant de savoir que si $u_n \to u$ faiblement dans E, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.

1. $v_n \to u$ dans E,

2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est une combinaison convexe de l'ensemble des u_p, $p \geq n$, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{N}_n \in \mathbb{N}$ et $t_{n,i} \in [0,1]$ pour $i = 0, \ldots \mathrm{N}_n$ t.q.

$$v_n = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}_n} t_{n,i} u_{n+i}, \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\mathrm{N}_n} t_{n,i} = 1.$$

Soit $1 < p \leq \infty$, donc $1 \leq q = \frac{p}{p-1} < \infty$. On note $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, $\mathrm{L}^q = \mathrm{L}^q_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et Φ l'application de L^p dans $(\mathrm{L}^q)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25). Le théorème 6.70 donne que Φ est une bijection de L^p dans $(\mathrm{L}^q)'$. On confond (ou on identifie) fréquemment $u \in \mathrm{L}^p$ avec $\Phi(u) \in (\mathrm{L}^q)'$. On a alors une notion de convergence faible-$*$ dans L^p. Si $1 < p < \infty$ (on a alors aussi $1 < q < \infty$), les notions de convergente faible et faible-$*$ dans L^p sont équivalentes. Dans le cas de L^∞, que l'on identifie fréquemment avec le dual (topologique) de L^1, les notions de convergente faible et faible-$*$ sont différentes. La convergence faible est plus forte que la convergence faible-$*$. On donne ci-dessous la définition de convergence faible-$*$ quand on considère L^∞ comme le dual de L^1.

Définition 6.85 (Convergence faible $*$ dans L^∞) *Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $\mathrm{L}^\infty = \mathrm{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^\infty$ et $f \in \mathrm{L}^\infty$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $*$-faiblement vers f dans L^∞ si pour tout élément g de $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a : $\int f_n g dm \to \int f g dm$.*

6.4.2 Convergence étroite et convergence en loi

Si m est une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$, on note L_m l'application de $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathrm{L}_m(\varphi) = \int \varphi dm$ (cette application caractérise m, d'après la proposition 5.8). On a vu au chapitre 5 que $\mathrm{L}_m \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})'$. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. La convergence faible-$*$ dans $(\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})'$ de L_{m_n} vers L_m, quand $n \to +\infty$, signifie donc que $\lim_{n\to+\infty} \int \varphi dm_n = \int \varphi dm$, pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Ceci s'appelle la convergence étroite de m_n vers m.

Définition 6.86 (Convergence étroite et vague) *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$.*

1. On dit que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to +\infty$, si :

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})).$$

2. On dit que $m_n \to m$ vaguement, quand $n \to +\infty$, si :

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})).$$

La proposition suivante montre que la convergence vague de m_n vers m et la convergence des masses totales (c'est-à-dire la convergence de $m_n(\mathbb{R})$ vers $m(\mathbb{R})$) donnent la convergence étroite. Si m et les mesures m_n sont des probabilités, la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to +\infty$) est donc équivalente à la convergence vague.

Proposition 6.87 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m_n \to m$ vaguement et que $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$ (quand $n \to +\infty$). On a alors $m_n \to m$ étroitement. (La réciproque de cette proposition est immédiate.)*

La démonstration de cette proposition est contenue dans l'exercice 5.14.

Remarque 6.88 Dans la proposition 6.87, l'hypothèse de convergence des masses totales est cruciale. Sans cette hypothèse, la convergence vague n'implique pas la convergence étroite. Un exemple simple est possible en prenant $d = 1$, $m = 0$ et $m_n = \delta_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La convergence en loi d'une suite de v.a.r. est définie par la convergence étroite (ou vague, puisque c'est équivalent pour des probabilités) des lois des v.a.r..

Définition 6.89 (Convergence en loi) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On dit que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to +\infty$, si :*

$$\int \varphi(X_n) dP \to \int \varphi(X) dP \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(Ceci est équivalent à dire que $P_{X_n} \to P_X$ étroitement.)

Noter qu'il est possible de définir la convergence en loi pour une suite de v.a.r. définies sur des espaces probabilisés différents (c'est-à-dire que X_n est définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ dépendant de n, et X est définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$). Nous utiliserons parfois implicitement cette définition plus générale.

Comme cela a déjà été dit ci-dessus, la proposition 6.87 donne une caractérisation intéressante de la convergence en loi en utilisant la convergence vague.

Proposition 6.90 (Caractérisation de la convergence en loi) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. La suite X_n tend vers X*

en loi, quand $n \to +\infty$, si et seulement si :

$$\int \varphi(X_n)dP \to \int \varphi(X)dP \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{6.34}$$

DÉMONSTRATION – La condition (6.34) est évidemment nécessaire car $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. D'après la proposition 6.87, la condition (6.34) est aussi suffisante. On redonne ici la démonstration du fait que (6.34) est suffisant pour avoir la convergence en loi de X_n vers X. On note $m_n = P_{X_n}$ et $m = P_X$.

Etape 1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\begin{cases} \varphi_p(s) = 0 \text{ si } s \leq -p-1, \\ \varphi_p(s) = s+p+1 \text{ si } -p-1 < s < -p, \\ \varphi_p(s) = 1 \text{ si } -p \leq s \leq p, \\ \varphi_p(s) = -s+p+1 \text{ si } p < s < p+1, \\ \varphi_p(s) = 0 \text{ si } p+1 < s. \end{cases}$$

Comme $(1-\varphi_p) \to 0$ simplement, quand $p \to \infty$, et que $0 \leq (1-\varphi_p) \leq 1$, le théorème de convergence dominée donne $\lim_{p\to\infty} \int (1-\varphi_p)dm = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$0 \leq \int (1-\varphi_{p_0})dm \leq \varepsilon.$$

On remarque maintenant que, comme $\varphi_{p_0} \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que m_n et m sont des probabilités, on a, quand $n \to +\infty$,

$$0 \leq \int (1-\varphi_{p_0})dm_n = 1 - \int \varphi_{p_0}dm_n \to 1 - \int \varphi_{p_0}dm = \int (1-\varphi_{p_0})dm \leq \varepsilon.$$

Il existe n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \int (1-\varphi_{p_0})dm_n \leq 2\varepsilon. \tag{6.35}$$

Etape 2. Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on utilise l'égalité $\varphi = \varphi(1-\varphi_p) + \varphi\varphi_p$. Elle donne

$$\int \varphi dm_n - \int \varphi dm = \int \varphi(1-\varphi_p)dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p)dm + \int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm. \tag{6.36}$$

En posant $\|\varphi\|_u = \sup_{s\in\mathbb{R}} |\varphi(s)|$ on a

$$|\int \varphi(1-\varphi_p)dm_n - \int_\varphi (1-\varphi_p)dm| \leq \|\varphi\|_u \Big(\int (1-\varphi_p)dm_n + \int (1-\varphi_p)dm\Big).$$

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'étape 1, il existe donc $p_1 \in \mathbb{N}^*$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow |\int \varphi(1-\varphi_{p_1})dm_n - \int \varphi(1-\varphi_{p_1})dm| \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $\varphi\varphi_{p_1} \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_2 \Rightarrow |\int \varphi\varphi_{p_1}dm_n - \int \varphi\varphi_{p_1}dm| \leq \varepsilon.$$

Finalement, l'égalité (6.36) avec $p = p_1$ donne alors

$$n \geq \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |\int \varphi d m_n - \int \varphi d m| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence étroite de m_n vers m et donc la convergence en loi de X_n vers X. ■

Une autre caractérisation intéressante de la convergence en loi est donnée dans le théorème 10.22. Elle donne l'équivalence entre la convergence en loi et la convergence simple des fonctions caractéristiques. La fonction caractéristique d'une v.a.r. est construite avec la transformation de Fourier (qui sera étudiée au chapitre 10).

Remarque 6.91 Un intérêt de la proposition 6.90 (ou du théorème 10.22) est qu'un élément de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ou une fonction de la forme $s \mapsto e^{ist}$) est nécessairement uniformément continue (alors qu'une fonction appartenant à $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas toujours uniformément continue). Cela permet, par exemple, de démontrer facilement que la convergence en probabilité implique la convergence en loi (voir l'exercice 6.69).

Une propriété parfois intéressante d'une suite de mesures convergeant étroitement est la tension de cette suite, notion qu'on définit maintenant.

Définition 6.92 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). On dit que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue si*

$$\lim_{a\to\infty} m_n(B_a^c) = 0, \text{ uniformément par rapport à } n,$$

avec $B_a = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq a\}$. (On désigne toujours par $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.)

Dans la proposition précédente, la propriété importante est le caractère uniforme (par rapport à n) de la convergence vers 0 de $m_n(B_a^c)$. En effet, pour tout n fixé, la continuité décroissante de la mesure m_n donne que $\lim_{a\to+\infty} m_n(B_a^c) = 0$. On montre maintenant que la convergence étroite d'une suite implique sa tension.

Proposition 6.93 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement. Alors la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.*

En particulier, soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en loi. La suite $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors tendue, c'est-à-dire

$$\lim_{a\to+\infty} P(\{|X_n| > a\}) = 0 \text{ uniformément par rapport à } n.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition est ici aussi essentiellement contenue dans l'exercice 5.14. En effet, soit $\varepsilon > 0$, la question 3 de l'exercice 5.14 montre qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et $\int_{\mathbb{R}^d} (1-\varphi) dm_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $a > 0$ t.q. $\varphi = 0$ sur B_a^c (c'est-à-dire que le support de φ est inclus dans $B_a = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq a\}$), on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(B_a^c) \leq \varepsilon$. Ce qui montre bien que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. ■

On peut maintenant donner une nouvelle caractérisation de la convergence étroite (et donc de la convergence en loi).

Proposition 6.94 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On a alors l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

1. $m_n \to m$ étroitement quand $n \to +\infty$,

2. $m_n \to m$ vaguement quand $n \to +\infty$ et la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.

DÉMONSTRATION – Le fait que la propriété 1 implique la propriété 2 a été vu dans la proposition 6.93. On montre maintenant la réciproque. Pour cela, on reprend la démonstration de la proposition 6.90.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ par

$$\begin{cases} \varphi_p(x) = 0 \text{ si } |x| \geq p+1, \\ \varphi_p(x) = p+1-|x| \text{ si } p < |x| < p+1, \\ \varphi_p(s) = 1 \text{ si } |x| \leq p. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on utilise l'égalité $\varphi = \varphi(1-\varphi_p) + \varphi\varphi_p$. Elle donne

$$\int \varphi dm_n - \int \varphi dm = \int \varphi(1-\varphi_p) dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p) dm + \int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm. \tag{6.37}$$

En posant $\|\varphi\|_u = \sup_{s\in\mathbb{R}^d} |\varphi(s)|$ on a

$$\left|\int \varphi(1-\varphi_p) dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p) dm\right| \leq \|\varphi\|_u \left(\int (1-\varphi_p) dm_n + \int (1-\varphi_p) dm \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $B_p = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq p\}$. Comme $0 \leq \int (1-\varphi_p) dm_n \leq m_n(B_p^c)$ et $0 \leq \int (1-\varphi_p) dm \leq m(B_p^c)$, l'hypothèse de tension sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et la continuité décroissante pour m) donne l'existence de p_1 t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi\|_u \int (1-\varphi_{p_1}) dm_n \leq \varepsilon \text{ et } \|\varphi\|_u \int (1-\varphi_{p_1}) dm \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $\varphi\varphi_{p_1} \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la convergence vague donne l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\int \varphi\varphi_{p_1} dm_n - \int \varphi\varphi_{p_1} dm\right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, l'égalité (6.37) avec $p = p_1$ donne alors

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence étroite de m_n vers m. ∎

Remarque 6.95 Voici une conséquence intéressante de la proposition 6.94 et de la proposition 8.19 du chapitre 8 (que l'on peut utiliser avec $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ qui est un espace de Banach séparable, ce qui n'est pas le cas de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$). Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. Il existe alors une sous-suite de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe une probabilité m sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ t.q. $m_n \to m$ étroitement quand $n \to +\infty$. Cette remarque sera détaillée dans la proposition 8.22.

Enfin, on donne maintenant un lien entre convergence en loi et convergence des fonctions de répartition. En particulier, la convergence en loi donne la convergence des fonctions de répartition en tout point de continuité de la fonction de répartition de la v.a.r. limite.

Proposition 6.96 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. et* X *une v.a.r..*

1. *On suppose que* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*. Soit* $a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $P(\{X = a\}) = 0$ *(c'est-à-dire que la fonction de répartition de* X *est continue au point* a*). On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{X_n \geq a\}) = P(\{X \geq a\}) = P(\{X > a\}) = \lim_{n\to+\infty} P(\{X_n > a\}).$$

   (La même propriété est vraie en remplaçant > par <.)

2. *On suppose que* $\lim_{n\to+\infty} P(\{X_n \geq a\}) = P(\{X \geq a\})$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $P(\{X = a\}) = 0$*. On a alors* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*.*

DÉMONSTRATION – Cette proposition se démontre en adaptant légèrement les corrigés des exercices 6.65 et 6.66. (en particulier, le premier item de la proposition 6.96 se démontre avec la première partie du corrigé de l'exercice 6.65). ∎

6.4.3 Lois des grands nombres

Dans ce paragraphe, on donne des résultats de convergence (en probabilité, p.s., en loi) pour des sommes de v.a.r. indépendantes. Nous commençons ce paragraphe par un résultat (simple) sur la variance de la somme de v.a.r. indépendantes, dont on déduit la loi faible des grands nombre qui donne non seulement un résultat de convergence (en probabilité) mais aussi des estimations précises sur cette convergence. Puis, on donne la loi forte des grands nombres et on énonce, en remarque, le théorème central limite. On reviendra sur ce théorème central limite au chapitre 10 car on utilisera, pour sa démonstration, la transformation de Fourier (et la remarque 6.95).

Proposition 6.97 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes deux à deux et de carré intégrable. On a alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Var(\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_n) = Var(\mathrm{X}_1) + \ldots + Var(\mathrm{X}_n).$$

DÉMONSTRATION – On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ et $\mathrm{E}_i = \mathrm{E}(\mathrm{X}_i)$. On a alors, par linéarité de l'intégrale, $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}_i$ et :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathrm{S}_n) = \mathrm{E}((\mathrm{S}_n - \mathrm{E}(\mathrm{S}_n))^2) = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n (\mathrm{X}_i - \mathrm{E}_i) \sum_{i=j}^n (\mathrm{X}_j - \mathrm{E}_j))\\ = \sum_{i,j=1}^n \mathrm{E}((\mathrm{X}_i - \mathrm{E}_i)(\mathrm{X}_j - \mathrm{E}_j)).\end{aligned}$$

Pour $i \neq j$, on a, comme X_i et X_j sont indépendantes, $\mathrm{E}((\mathrm{X}_i - \mathrm{E}_i)(\mathrm{X}_j - \mathrm{E}_j)) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_i - \mathrm{E}_i)\mathrm{E}(\mathrm{X}_j - \mathrm{E}_j) = 0$. On en déduit :

$$\mathrm{Var}(\mathrm{S}_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}((\mathrm{X}_i - \mathrm{E}_i)^2) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\mathrm{X}_i).$$

■

Proposition 6.98 (Loi faible des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes deux à deux et de carré intégrable. On suppose que ces v.a.r. sont de même moyenne* m *et de même variance* σ^2. *On pose* $\mathrm{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ *(ce sont les moyennes de Cesàro de la suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*), alors* Y_n *converge en probabilité vers la v.a.r. constante et égale à* m*, c'est-à-dire que l'on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}(|\mathrm{Y}_n - m| > \varepsilon) \to 0 \textit{ lorsque } n \to +\infty.$$

Plus précisément, on a pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(|\mathrm{Y}_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \tag{6.38}$$

DÉMONSTRATION – Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev (lemme 4.57), on a :

$$\mathrm{P}(|\mathrm{Y}_n - m| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}((\mathrm{Y}_n - m)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}((\mathrm{Y}_n - m)^2).$$

Puis, en posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a $E((Y_n - m)^2) = \frac{1}{n^2} E((S_n - nm)^2) = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2}$. La proposition 6.97 donne $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n\sigma^2$. On en déduit finalement

$$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

■

On donne maintenant la loi forte des grands nombres. La loi forte des grands nombres donne une convergence p.s., ce qui est plus fort qu'une convergence en probabilité (donnée par la loi faible des grands nombres). D'autre part, le deuxième item de la proposition 6.99 (loi forte) ne demande que l'intégrabilité des v.a.r., ce qui est moins fort que de demander qu'elles soient de carré intégrable (hypothèse de la loi faible). La loi forte semble donc, à double titre (hypothèse moins forte et conclusion plus forte), meilleure que la loi faible. Ceci n'est pas tout à fait exact car l'intérêt de la loi faible est de donner une estimation sur la vitesse de convergence (inégalité (6.38)) ce que ne donne pas la loi forte.

On admettra la proposition suivante, qui donne la loi forte des grands nombres (voir par exemple [**neveu**, **revuz**])

Proposition 6.99 (Loi forte des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes.*

1. *On suppose ici que les* X_n *sont de carré intégrable, que* $E(X_n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et que*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{E(X_n^2)}{n^2} < +\infty.$$
On a alors :
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0 \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

2. *On suppose ici que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.r.i.i.d. et que* $E(|X_1|) < +\infty$. *Alors :*
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to E(X_1) \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

3. *On suppose ici simplement que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.r.i.i.d.. Alors, pour toute fonction* φ *borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $E(|\varphi(X_1)| < +\infty$ *(il suffit, par exemple, que* φ *soit bornée), on a :*
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(X_i) \to E(\varphi(X_1)) \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

Exercice 6.18 (Convergence presque partout et convergence des normes, par Fatou) Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré. Pour $p \in [1,\infty]$, on note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.

Soit $p \in [1,\infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in \mathrm{L}^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose que $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \to f$ dans L^1.

   Corrigé – *Comme $|f - f_n| \leq |f| + |f_n|$, on a bien $g_n \geq 0$. Comme g_n tend p.p. vers $2|f|$, le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne :*
   $$\int 2|f|dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm.$$
   Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$, on a $\liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm = 2\int |f|dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|dm$. On a donc :
   $$\int 2|f|dm \leq 2\int |f|dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|dm.$$
   On en déduit que $\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|dm \leq 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^1.

2. On suppose maintenant que $p \in]1,\infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

   Corrigé – *On prend maintenant $g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p$. Comme $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2\max\{|f_n|,|f|\}$, on a $|f - f_n|^p \leq 2^p \max\{|f_n|,|f|\}^p \leq 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p$. On a donc $g_n \geq 0$. Comme g_n tend p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$, le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne :*
   $$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm.$$
   Comme $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, on a
   $$\liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm = 2^{p+1}\int |f|^p dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$
   On a donc
   $$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq 2^{p+1}\int |f|^p dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$
   On en déduit que $\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm \leq 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^p.

Exercice 6.20 ("Compacité" $L^p - L^q$) Dans cet exercice, on montre que, dans le cas d'une mesure finie, si une suite de fonctions converge presque partout et est bornée dans L^p, alors elle converge dans L^q pour $1 \le q < p$. Noter que ce résultat n'est donc vrai que si $p > 1$.

Dans toute la suite, (E, T, m) est un espace mesuré, et pour tout $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

1. Soit $r > 1$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^r. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire que :

   Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.
   $$\text{si } n \in \mathbb{N}, \text{ et } A \in T \text{avec } m(A) \le \delta \text{ alors } \int_A |g_n| dm \le \varepsilon.$$

   [Utiliser l'inégalité de Hölder.]

   Corrigé – *En utilisant l'inégalité de Hölder (inégalité (6.1)) entre $r \in]1, \infty]$ et son conjugué et les fonctions g_n et 1_A, on obtient, pour tout $A \in T$ de mesure finie :*
   $$\int_A |g_n| dm \le \|g_n\|_r m(A)^{1-\frac{1}{r}}.$$
   Si C est un majorant de $\{\|g_n\|_r,\ n \in \mathbb{N}\}$, il suffit donc de prendre $\delta > 0$ t.q. $C\delta^{1-\frac{1}{r}} \le \varepsilon$ (ce qui est possible car $r > 1$) pour avoir le résultat demandé.

   Soit $1 \le q < p \le \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p. On suppose dans toute la suite que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$.

2. *Compacité* $L^p - L^q$*, mesure finie* On suppose que $m(E) < \infty$.

   (a) Montrer que $f \in L^p$ (au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.).

   Corrigé – *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in A^c$. On pose $g(x) = f(x)$ pour $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ pour $x \in A$, de sorte que $g = f$ p.p. et $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ pour tout $x \in E$.*

   Si $p < \infty$, on applique le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne :
   $$\int |g|^p dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int |f_n|^p dm \le C^p,$$
   où C est un majorant de $\{\|f_n\|_p,\ n \in \mathbb{N}\}$. On a donc $g \in \mathcal{L}^p$ et donc $f \in L^p$ (au sens demandé).

   Si $p = \infty$, comme $|f_n| \le \|f_n\|_\infty$ p.p., on déduit de $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ pour tout $x \in E$ le fait que $\|g\|_\infty \le C$ p.p., où C est un majorant de $\{\|f_n\|_\infty,\ n \in \mathbb{N}\}$. On a donc, ici aussi, $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in L^\infty$ (au sens demandé).

(b) Montrer que $f_n \to f$ dans L^q quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1 avec $g_n = |f_n - f|^q$ et un théorème du cours.]

Corrigé – *La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^r, avec $r = \frac{p}{q} > 1$. Elle est donc équi-intégrable (par la question 1). Comme elle converge p.p. vers 0 et que $m(\mathrm{E}) < \infty$, le théorème de Vitali (théorème 4.51) donne que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans L^1 et donc que $f_n \to f$ dans L^q quand $n \to +\infty$.*

3. *Cas d'une mesure infinie, contre exemple* On suppose que $m(\mathrm{E}) = +\infty$.

(a) Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{B}) < \infty$. Montrer que $f_n 1_{\mathrm{B}} \to f 1_{\mathrm{B}}$ dans L^q quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On définit la mesure m_{B} sur T en posant $m(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. La mesure m_{B} est finie. On peut donc appliquer la question 2 avec cette mesure. On obtient que $f_n \to f$, quand $n \to +\infty$, dans l'espace $\mathrm{L}^q_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m_{\mathrm{B}})$. Ceci qui donne que $f_n 1_{\mathrm{B}} \to f 1_{\mathrm{B}}$ dans L^q quand $n \to +\infty$ (car, $\int |f_n - f|^q 1_{\mathrm{B}} dm = \int |f_n - f|^q dm_{\mathrm{B}}$).*

(b) On prend ici $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $p = 2$, $q = 1$, $f = 0$. Donner un exemple pour lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$, $f_n \not\to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^2, $f_n \to 0$ p.p. quand $n \to +\infty$).

Corrigé – *On peut prendre, par exemple, $f_n = 1_{]n,n+1[}$.*

Exercice 6.27 (Exemples de v.a. appartenant à L^q**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. (réelle). Dans les trois cas suivants, donner les valeurs de $q \in [1, \infty]$ pour lesquels la variable aléatoire X appartient à l'espace $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ (c'est-à-dire que la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

   Corrigé – *Soit* $q \in [1, \infty[$, *on a :*
$$\int_\Omega |X|^q dP = \int_{\mathbb{R}} |x|^q dP_X(x) = \int_0^\infty x^q \lambda \exp(-\lambda x) dx < \infty,$$
   car la fonction $x \mapsto |x|^q \lambda \exp(-\lambda x)$ *est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^+$. *On a donc* $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   Soit maintenant $q = \infty$. *Pour tout* $a > 0$, *on a, avec* $A =]a, \infty[$ *:*
$$P[X > a] = \int_\Omega 1_A(X) dP = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) dP_X(x) = \int_a^\infty \lambda \exp(-\lambda x) dx > 0,$$
   car $\lambda \exp(-\lambda x) > 0$ *pour tout* $x > a$. *Donc* $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2 + c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

   Corrigé – *Il suffit ici de considérer le cas* $q = 1$. *On a :*
$$\int_\Omega |X| dP = \int_{\mathbb{R}} |x| dP_X(x) \geq \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + c^2} dx \geq \frac{c}{\pi} \int_c^\infty \frac{1}{2x} dx = \infty.$$
   On a donc $X \notin L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *ce qui donne aussi* $X \notin L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *pour tout* $q \in [1, \infty]$ *(car* $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *pour* $q > 1$*).*

3. X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ $(p \in]0, 1[)$ (c'est-à-dire que $P(\{X = k\}) = p(1 - p)^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$).

   Corrigé – *On note* $A_k = \{X = k\} = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = k\}$ *et* $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. *Par* σ*-additivité de* P, *on a* $P(A) = \sum_{k=1}^\infty P(A_k) = \sum_{k=1}^\infty p(1-p)^{k-1} = 1$. *On a donc* $P(A^c) = 0$.

   Soit $q \in [1, \infty[$, *on a :*
$$\int_\Omega |X|^q dP = \int_A |X|^q dP = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} |X|^q dP = \sum_{k=1}^\infty k^q p(1-p)^{k-1} < \infty,$$
   car la série de terme général $k^q p(1-p)^{k-1}$ *est convergente (pour le voir, il suffit, par exemple, de remarquer que*
$$\lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)^q p(1-p)^k}{k^q p(1-p)^{k-1}} = \lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)^q (1-p)}{k^q} = 1 - p < 1.$$
   On a donc $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   Soit maintenant $q = \infty$. *Pour tout* $a > 0$, *on a* $P[X > a] \geq P(A_k) > 0$ *si* $k > a$. *On a donc* $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 6.36 (Approximation dans L^2**)** On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathrm{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathrm{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

Pour $f \in \mathrm{L}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathrm{T}_k f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{T}_k f(x) = k \int_{\frac{n(x)}{k}}^{\frac{n(x)+1}{k}} f(t)dt, \tag{6.56}$$

où $n(x)$ est l'entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n(x)}{k} \le x < \dfrac{n(x)+1}{k}$ (l'entier n dépend donc de x).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{L}^2$. Montrer que $\mathrm{T}_k f \in \mathrm{L}^2$ (plus précisément, $\mathrm{T}_k f \in \mathcal{L}^2$ et on confond alors, comme d'habitude, $\mathrm{T}_k f$ avec $\{g \in \mathcal{L}^2,\ g = \mathrm{T}_k f$ p.p.$\}$) et que $\|\mathrm{T}_k f\|_2 \le \|f\|_2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Corrigé – *Comme* $f \mathbf{1}_{]\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[} \in \mathrm{L}^1$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*,* $\mathrm{T}_k(x)$ *est bien définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. On pose* $c_n = k \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f(t)dt$*, pour* $n \in \mathbb{Z}$*, de sorte que* $\mathrm{T}_k(x) = c_n$ *pour tout* $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$.

   $\mathrm{T}_k f$ *est mesurable car* $(\mathrm{T}_k f)^{-1}(\mathrm{A}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}, c_n \in \mathrm{A}} [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[\in \mathrm{B}(\mathbb{R})$*, pour tout* $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$.

   Pour $n \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$*, on a (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz)*

   $$(\mathrm{T}_k(x))^2 = c_n^2 \le k \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt.$$

   On en déduit (on utilise ici le premier corollaire du théorème de convergence monotone, corollaire 4.18) :

   $$\int (\mathrm{T}_k f)^2 d\lambda = \sum_{n \in \mathrm{Z}} \frac{1}{k} c_n^2 \le \sum_{n \in \mathrm{Z}} \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt = \int f^2 d\lambda.$$

   On a donc $\mathrm{T}_k f \in \mathrm{L}^2$ *et* $\|\mathrm{T}_k f\|_2 \le \|f\|_2$.

2. Soit $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (*i.e.* f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\mathrm{T}_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

   Corrigé – *Soit* $a > 0$ *t.q.* $f = 0$ *sur* $[-a, a]^c$*. Comme* f *est uniformément continue, on a* $\mathrm{T}_k f \to f$ *uniformément (sur* $\mathbb{R}$*) quand* $k \to \infty$*. En remarquant que* $\mathrm{T}_k f = 0$ *sur* $[-a-1, a+1]^c$*pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, on en déduit*

   $$\|\mathrm{T}_k f - f\|_2^2 = \int (\mathrm{T}_k f - f)^2 d\lambda \le 2(a+1)\|\mathrm{T}_k f - f\|_\infty^2 \to 0, \text{ quand } k \to \infty.$$

3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.
   [On pourra utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^2, exercice 6.5.]

   Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^2, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_2 \le \varepsilon$. Comme T_k est un opérateur linéaire, on a, en utilisant la question 1 :*

$$\|T_k f - f\|_2 \le \|T_k f - T_k\varphi\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 \le 2\|\varphi - f\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2. \quad (6.57)$$

   La question 2 donne l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. le dernier terme de (6.57) soit inférieur à ε pour $k \ge k_0$. On a donc $\|T_k f - f\|_2 \le 3\varepsilon$ pour $k \ge k_0$, ce qui prouve que $T_k f \to f$, dans L^2, quand $k \to \infty$.

Exercice 6.44 (Convergence presque sûre et borne L^2 donne convergence L^1) Cet exercice reprend l'exercice 6.20 (pour $q = 2$ et $p = 1$) avec les termes probabilistes et une méthode légèrement différente. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r.. On suppose

— $X_n \to 0$ p.s., quand $n \to +\infty$.

— $E(X_n^2) \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $E(|X_n|) \leq \varepsilon + \sqrt{P(|X_n| > \varepsilon)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Corrigé – *On obtient, avec Cauchy–Schwarz,*
   $$E(|X_n|) = \int_{|X_n|\leq\varepsilon} |X_n| dP + \int_{|X_n|>\varepsilon} |X_n| dP \leq \varepsilon + \sqrt{E(X_n^2)}\sqrt{P(|X_n| > \varepsilon)}.$$

2. Montrer que $X_n \to 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$, la convergence p.s. implique la convergence en probabilité. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.*
   $$n \geq n_0 \Rightarrow P(|X_n| > \varepsilon) \leq \varepsilon^2.$$
   Avec la question 1, on a donc
   $$n \geq n_0 \Rightarrow E(|X_n|) \leq 2\varepsilon.$$
   Ce qui prouve que $X_n \to 0$ dans L^1.

3. Montrer, en donnant un exemple, que les hypothèses données au début de l'exercice n'entraînent pas les hypothèses du théorème de convergence dominée.

   Corrigé – *On peut prendre $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $X_n = n 1_{]1/(n+1),1/n[}$ pour $n \geq 1$.*

Exercice 6.45 (Orthogonalité et v.a.r. indépendantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes. On suppose que X_n est de carré intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(X_n \mid X_m)_2 = 0$ si $n \neq m$ (On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et $(\cdot \mid \cdot)_2$ le produit scalaire dans L^2). On suppose enfin que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < +\infty$.

1. Montrer qu'il existe au plus un entier $n \geq 0$ t.q. $E(X_n) \neq 0$.

   Corrigé – *Soit $n \neq m$. Comme X_n et X_m sont deux v.a.r. indépendantes et intégrables, la proposition 4.59 (deuxième item) donne que $X_n X_m$ est intégrable et*
   $$E(X_n X_m) = E(X_n)E(X_m).$$
   Comme $E(X_n X_m) = \int_\Omega X_n X_m dP = (X_n \mid X_m)_2 = 0$, on en déduit qu'il est impossible que $E(X_n)$ et $E(X_m)$ soient tous les deux non nuls. On en déduit bien qu'il existe au plus un entier $n \geq 0$ t.q. $E(X_n) \neq 0$.

2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ est convergente dans L^2.

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Var(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf éventuellement un seul, on a donc*

$$Var(X_n) = E(X_n^2) = \int_\Omega X_n^2 dP = \|X_n\|_2^2.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|X_n\|_2^2$ est donc convergente. On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ est convergente dans L^2, comme cela est démontré dans l'exercice 6.30.

Exercice 6.49 (Dualité L^1-L^∞ par Radon-Nikodym) Soit $(E, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré fini et $T \in (L^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{F}, m))'$. On suppose que T est positive, c'est-à-dire que, pour $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{F}, m)$, $f \geq 0$ p.p. implique $T(f) \geq 0$.

1. Pour $A \in \mathcal{F}$, on pose $\mu(A) = T(1_A)$. Montrer que μ est bien définie et que μ est une mesure finie sur $\mathcal{F}$.

   On note $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{F}, m)$ et $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{F}, m)$ (pour $r = 1$ et $r = \infty$).

   Corrigé – *Soit $A \in \mathcal{F}$, comme m est une mesure finie, on a $1_A \in \mathcal{L}^1$ (et donc $1_A \in L^1$ en confondant un élément de $\mathcal{L}^1$ avec sa classe dans L^1). On peut définir $\mu(A)$ par $T(1_A)$.*

   Pour montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{F}$, on remarque tout d'abord que $\mu(\emptyset) = T(1_\emptyset) = T(0) = 0$. Puis, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on remarque que $\sum_{n=0}^{N} 1_{A_n} \to 1_A$ dans L^1 quand $N \to \infty$ (en effet, on a bien une convergence p.p. et une domination par 1_E qui est intégrable). Comme $T \in (L^1)'$, on a donc $\sum_{n=0}^{N} T(1_{A_n}) = T(\sum_{n=0}^{N} 1_{A_n}) \to T(1_A)$ quand $N \to \infty$. Avec la définition de μ, on en déduit :

   $$\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n) \to \mu(A) \text{ quand } N \to \infty.$$

   Ce qui montre bien que μ est une mesure sur $\mathcal{F}$.

   Pour montrer que μ est finie, il suffit de remarquer que $\mu(E) = T(1_E) \in \mathbb{R}$ (noter que $1_E \in \mathcal{L}^1$).

2. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $T(1_A) = \int g 1_A dm$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

   Corrigé – *Soit $A \in \mathcal{F}$ t.q. $m(A) = 0$. On a donc $1_A = 0$ p.p.. On en déduit que $\mu(A) = T(1_A) = 0$ (la fonction 1_A est un élément de la classe de 0 dans L^p).*

   La mesure μ est donc absolument continue par rapport à la mesure m. On peut appliquer le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78), il donne l'existence de $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. :

   $$T(1_A) = \mu(A) = \int g 1_A dm \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}. \tag{6.61}$$

3. Montrer que $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{F}, m)$ (plus précisément, il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{F}, m)$ t.q. $h = g$ p.p.). [On pourra montrer que $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{(L^1)'}$ en choisissant bien A dans la formule trouvée à la question précédente.]

   Corrigé – *On prend $A = \{g > \|T\|_{(L^1)'}\}$. Si $m(A) > 0$, on a, avec (6.61), en remarquant que $\|1_A\|_1 = m(A)$:*

   $$\|T\|_{(L^1)'} m(A) < \int g 1_A dm = T(1_A) \leq \|T\|_{(L^1)'} m(A),$$

ce qui est impossible. On a donc $m(\mathrm{A}) = 0$, ce qui prouve que $g = h$ p.p. avec h définie par $h = g$ sur A^c et $h = 0$ sur A. Comme $h \in \mathcal{L}^\infty$, on a donc $g \in \mathrm{L}^\infty$ (au sens où il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathcal{F}, m)$ t.q. $h = g$ p.p.).

On a aussi montré que $\|g\|_\infty = \|h\|_\infty \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$.

4. Montrer que $\mathrm{T}(f) = \int g f \, dm$ pour tout $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathcal{F}, m)$.

Corrigé – *Grâce à (6.61), on a, pour tout $f = 1_\mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$:*

$$\mathrm{T}(f) = \int g f \, dm. \tag{6.62}$$

Par linéarité de T (sur L^1) et par linéarité de l'intégrale, on en déduit que (6.62) est encore vraie si $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$ (on confond encore f et sa classe).

Puis, si $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$ et $gf \in \mathcal{L}^1$, le théorème de convergence dominée donne $f_n \to f$ dans L^1 et $gf_n \to gf$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (noter que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par f et $(gf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par gf). En écrivant (6.62) avec $f = f_n$ et en faisant $n \to +\infty$, on en déduit (6.62). L'égalité (6.62) est donc vraie pour tout $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit enfin $f \in \mathrm{L}^1$ (on confond f avec l'un de ses représentants). On écrit alors (6.62) pour $f = f^+ \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$ et $f = f^- \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$. En faisant la différence on en déduit (6.62).

L'égalité (6.62) est donc vraie pour tout $f \in \mathrm{L}^1$.

Exercice 6.52 (Convergence faible et convergence des normes $\Rightarrow$ convergence forte) Soient $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^2 = \mathrm{L}^2(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ et $f \in \mathrm{L}^2$ t.q. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende faiblement vers f dans L^2, c'est-à-dire : $\int f_n\varphi dm \to \int f\varphi dm$ pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{L}^2$.

1. Montrer que $\|f\|_2 \le \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_2$.

   Corrigé – *Comme $f_n \to f$ faiblement vers f dans L^2 (quand $n\to+\infty$) et que $f \in \mathrm{L}^2$, on a :*
   $$\int f_n f\,dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2 \text{ quand } n\to+\infty.$$
   L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int f_n f\,dm \le \|f_n\|_2\|f\|_2$. On en déduit, en faisant tendre n vers l'infini :
   $$\begin{aligned}\|f\|_2^2 = \lim_{n\to+\infty}\int f_n f\,dm = \liminf_{n\to+\infty}\int f_n f\,dm &\le \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_2\|f\|_2\\ &= \|f\|_2\liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_2,\end{aligned}$$
   et donc $\|f\|_2 \le \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_2$.

2. On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n\to+\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans L^2.

   Corrigé – *On remarque que $\|f_n-f\|_2^2 = (f_n-f \mid f_n-f)_2 = \|f_n\|_2^2+\|f\|_2^2-2\int f_n f\,dm$. On a $\|f_n\|_2^2 \to \|f\|_2^2$ et, comme $f_n \to f$ faiblement dans L^2, on a aussi $\int f_n f\,dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2$, quand $n\to+\infty$. On en déduit donc que $\|f_n - f\|_2 \to 0$ quand $n\to+\infty$.*

Exercice 6.59 (Convergence étroite de mesures) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on rappelle que “m_n finie” signifie que “$m_n(\mathbb{R}) < \infty$”) et m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

On suppose que :

$$\int g dm_n \to \int g dm, \text{ pour tout } g \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On ne suppose pas que f est bornée, mais on suppose que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\alpha < \infty$.

   Corrigé – *La fonction constante et égale à* 1 *appartient à* $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *L'hypothèse donne donc* $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$, *quand* $n \to +\infty$. *La suite* $(m_n(\mathbb{R}))_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc bornée (car convergente dans* $\mathbb{R}$*), ce qui donne* $\alpha < \infty$.

2. On suppose, dans cette question, que :

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty.$$

   (a) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact et t.q. $0 \le \varphi(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α et β (définis ci-dessus), t.q. :

$$\int |f|\varphi dm \le C.$$

   Corrigé – *En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :*

$$\int |f|\varphi dm_n \le (\int f^2 dm_n)^{\frac{1}{2}}(\int \varphi^2 dm_n)^{\frac{1}{2}} \le \beta^{\frac{1}{2}} m_n(\mathbb{R})^{\frac{1}{2}} \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

   Comme $|f|\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *l'hypothèse donne*

$$\int |f|\varphi dm = \lim_{n\to+\infty} \int |f|\varphi dm_n.$$

   On déduit donc de la majoration précédente que $\int |f|\varphi dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$.

   (b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

   Corrigé – *On définit* φ_1 *en posant :*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = 1, \ si\ 0 \le x \le 1,\\
&\varphi_1(x) = 2 - x, \ si\ 1 < x \le 2,\\
&\varphi_1(x) = 0, \ si\ 2 < x,\\
&\varphi_1(x) = \varphi_1(-x), \ si\ x < 0.
\end{aligned}$$

Puis, pour $p \geq 2$, $\varphi_p(x) = \varphi_1(\frac{x}{p})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La question précédente donne $\int |f|\varphi_p dm \leq (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $p \geq 1$. Comme la suite $(\varphi_p)_{p\geq 1}$ converge simplement et en croissant vers la fonction constante égale à 1, le théorème de convergence monotone donne que $\int |f|dm \leq (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On utilise encore la suite $(\varphi_p)_{p\geq 1}$ définie à la question précédente et on remarque que, pour tout $p \geq 1$,*

$$|\int f dm_n - \int f dm| \leq \int |f|(1-\varphi_p)dm_n + \int |f|(1-\varphi_p)dm \\ +|\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm|. \tag{6.93}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \geq 1$, on a $|f|(1-\varphi_p) \leq |f|$ p.p.. Comme $(1-\varphi_p) \to 0$ p.p. et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne $\int |f|(1-\varphi_p)dm \to 0$ quand $p \to \infty$. Il existe donc $p_0 \geq 1$ t.q.

$$p \geq p_0 \Rightarrow \int |f|(1-\varphi_p)dm \leq \varepsilon.$$

En utilisant encore le théorème de convergence dominée (les constantes étant intégrables pour la mesure m), il existe aussi $p_1 \geq 1$ t.q.

$$p \geq p_1 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p)dm < \varepsilon^2.$$

On choisit maintenant $p = \max(p_0, p_1)$. Comme $(1-\varphi_p) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a donc $\int (1-\varphi_p)dm_n \to \int (1-\varphi_p)dm$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p)dm_n < \varepsilon^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $(1-\varphi_p)^2 \leq (1-\varphi_p)$, on en déduit, pour $n \geq n_0$,

$$\int |f|(1-\varphi_p)dm_n \leq \beta^{\frac{1}{2}}(\int (1-\varphi_p)dm_n)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Enfin, comme $f\varphi_p \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $\int f\varphi_p dm_n \to \int f\varphi_p dm$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_1 t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow |\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm| \leq \varepsilon.$$

Finalement, avec ce choix de $p = \max(p_0, p_1)$, on déduit donc de (6.93) que

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow |\int f dm_n - \int f dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve bien que $\displaystyle\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$.

3. On ne suppose plus que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty$.

   Montrer (en choisissant convenablement $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, m et f) que l'on peut avoir $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

Corrigé – *On peut prendre, par exemple, $m_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $m_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\delta_p$ (où δ_p est la masse de Dirac en p). On prend f définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les hypothèses sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et m sont bien vérifiées avec $m = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}\delta_p$.*

On a bien $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

Exercice 6.65 (Convergence étroite et mesures des intervalles) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to +\infty$, et que m est diffuse (c'est-à-dire que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, montrer que $m_n(\mathrm{I}) \to m(\mathrm{I})$ quand $n \to +\infty$. Montrer (en donnant un contre-exemple) que cette propriété peut être fausse si m n'est pas diffuse.

Corrigé – *On remarque tout d'abord que* $m_n(\mathrm{I}) \to m(\mathrm{I})$ *si* $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, *car* $\int 1_{\mathbb{R}} dm_n \to \int 1_{\mathbb{R}} dm$.

Soit maintenant $a \in \mathbb{R}$, *on va montrer que* $m_n(\mathrm{I}) \to m(\mathrm{I})$ *si* $\mathrm{I} =]-\infty, a]$ *ou* $\mathrm{I} =]-\infty, a[$. *Pour cela, on définit, pour* $p \in \mathbb{N}^*$, φ_p, $\psi_p \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *en posant :*

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(x) = 1 \text{ si } x \leq a - \tfrac{1}{p},\\
&\varphi_p(x) = -p(x-a) \text{ si } a - \tfrac{1}{p} < x < a,\\
&\varphi_p(x) = 0 \text{ si } a \leq x,\\
&\psi_p(x) = \varphi_p(x - \tfrac{1}{p}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_p \leq 1_{\mathrm{I}} \leq \psi_p$ *on a* $\int \varphi_p dm_n \leq m_n(\mathrm{I}) \leq \int \psi_p dm_n$ *pour tout* p, $n \in \mathbb{N}$. *En passant à la limite quand* $n \to +\infty$, *on a donc, pour tout* $p \in \mathbb{R}$ *:*

$$\int \varphi_p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \leq \limsup_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \leq \int \psi_p dm.$$

Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{p\to\infty} \int \varphi_p dm = m(]-\infty, a[) \text{ et } \lim_{p\to\infty} \int \psi_p dm = m(]-\infty, a]).$$

On en déduit

$$m(]-\infty, a[) \leq \liminf_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \leq \limsup_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \leq m(]-\infty, a]).$$

Comme $m(]-\infty, a]) = m(]-\infty, a[) + m(\{a\}) = m(]-\infty, a[) = m(\mathrm{I})$, *on a, finalement,*

$$m(\mathrm{I}) \leq \liminf_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \leq \limsup_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \leq m(\mathrm{I}),$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) = m(\mathrm{I})$.

En écrivant que $m_n(\mathrm{J}) = m(\mathbb{R}) - m(\mathrm{J}^c)$, *il est facile de voir que l'on a aussi* $m_n(\mathrm{J}) \to m(\mathrm{J})$ *pour tout intervalle* J *de la forme* $[a, +\infty[$ *ou* $]a, +\infty[$. *Enfin, si* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *un intervalle, noté* K, *dont les bornes sont* a *et* b *peut s'écrire comme différence de deux intervalles dont les bornes supérieures sont* a *et* b *et dont la borne inférieure est* $-\infty$. *On en déduit alors facilement que* $m_n(\mathrm{K}) \to m(\mathrm{K})$, *ce qui termine la démonstration.*

La propriété démontré peut être fausse si m *n'est pas diffuse. Pour le voir, il suffit de prendre, par exemple,* $m = \delta_0$ *et* $m_n = \delta_{1/n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a bien* $m_n \to m$ *étroitement et pour* $\mathrm{I} =]-\infty, 0]$ *(par exemple) on a* $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) = 0 \neq 1 = m(\mathrm{I})$.

Exercice 6.66 (Convergence en loi et fonction de répartition)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On note m_n la loi de X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et m la loi de X. On note $\mathrm{F_Y}$ la fonction de répartition de Y (pour $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_n$).

1. On suppose, dans cette question, que X_n converge en loi vers X quand $n \to +\infty$. (c'est-à-dire que $E(\varphi(X_n)) \to E(\varphi(X))$ pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

(a) (Question difficile.) Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que F_X est continue au point a (on dit que a est un point de continuité de F_X).
Montrer que $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On pose* $\varphi = 1_{]-\infty,a]}$ *de sorte que*
$F_{X_n}(a) = m_n(]-\infty,a]) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n$ *et* $F_X(a) = m(]-\infty,a]) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$.
On peut construire deux suites de fonctions appartenant à $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *notées* $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$, *telles que*

- $\varphi \le \varphi_p \le 1$ *et* $\varphi_p(x) \to \varphi(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *quand* $p \to +\infty$.
- $0 \le \psi_p \le \varphi$ *et* $\varphi_p(x) \to \varphi(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $x \ne a$ *quand* $p \to +\infty$.

Pour construire ψ_p *et* φ_p, *on peut, par exemple, prendre* ψ_p *et* φ_p *affines par morceaux et égales à* φ *sur le complémentaire de l'intervalle* $]a-1/p, a+1/p[$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. *Comme* $\psi_p \le \varphi \le \varphi_p$, *on a*

$$E(\psi_p(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \psi_p dm_n \le \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \le \int_{\mathbb{R}} \varphi_p dm_n = E(\varphi_p(X_n)).$$

Comme $X_n \to X$ *en loi, on en déduit, quand* $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} E(\psi_p(X)) = \int_{\mathbb{R}} \psi_p dm &\le \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \\ &\le \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \le \int_{\mathbb{R}} \varphi_p dm = E(\varphi_p(X)). \end{aligned} \tag{6.100}$$

On peut maintenant faire $p \to +\infty$ *dans ces inégalités.*
Comme φ_p *converge simplement vers* φ *et est dominée par* $1_{\mathbb{R}}$, *on a, par le théorème de convergence dominée,*

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_p dm = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On utilise maintenant le fait que F *est continue en* a, *ce qui donne* $m(a) = \lim_{k\to+\infty} F(a) - F(a-1/k) = 0$. *On a donc* $\psi_p \to \varphi$ *p.p. pour la mesure* m. *On peut donc aussi appliquer le théorème de convergence dominée, il donne*

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_p dm = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On passe maintenant à la limite quand $p \to +\infty$ *dans (6.100) pour obtenir*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \le \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \le \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On a donc $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$ *quand* $n \to +\infty$, *c'est-à-dire* $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ *quand* $n \to +\infty$.

(b) Donner un exemple pour lequel il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $F_{X_n}(a) \not\to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$.

> **Corrigé** – *Il suffit de prendre* X_n *telle que* $X_n = 1/n$ *p.s. et* $X = 0$ *p.s.. On a bien que* $X_n \to X$ *en loi, mais, pour* $a = 0$, $F_{X_n}(a) = 0 \not\to 1 = F_X(a)$.

2. On note C l'ensemble des points de continuité de F_X et on suppose, dans cette question, que, pour tout $a \in C$, $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$. L'objectif de la question est de montrer que que X_n converge en loi vers X quand $n \to +\infty$.

(a) Montrer que $m_n(]a,b]) \to m(]a,b])$, quand $n \to +\infty$, pour tout $a, b \in C$, $a < b$.

> **Corrigé** – *Soit* $a, b \in C$, $a < b$.
> *Il suffit de remarquer que* $m_n(]a,b]) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$ *et* $m(]a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$. *Comme* $a, b \in C$, *on a* $F_{X_n}(b) \to F_X(b)$ *et* $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ *et donc* $m_n(]a,b]) \to m(]a,b])$.

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $\varphi \in S$ si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ et $a_0, \ldots, a_p \in C$ t.q. $a_0 < \ldots < a_p$. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$.

(b) Soit $\varphi \in S$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm, \text{ quand } n \to +\infty.$$

> **Corrigé** – *On a, en utilisant la définition de* S, $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$ *et donc, en utilisant la linéarité de l'intégrale et la question précédente (car* $a_i \in C$*),*
> $$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i m_n(]a_{i-1}, a_i]) \to \sum_{i=1}^{p} \alpha_i m(]a_{i-1}, a_i]) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

(c) Montrer que C est dense dans $\mathbb{R}$ et en déduire que pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\psi \in S$ telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$.

> **Corrigé** – *La fonction* F_X *est croissante, l'exercice 1.4 montre alors que l'ensemble des points de discontinuité de* F_X, *c'est-à-dire* C^c, *est fini ou dénombrable. Tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}$ *étant non dénombrable, on déduit que tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}$ *rencontre* C. *Ceci prouve que* C *est dense dans* $\mathbb{R}$.
> *Soit* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $\varepsilon > 0$. *Comme* φ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que*
> $$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$
> *Pour* $i \in \mathbb{Z}$, *on pose* $b_i = i\eta/2$ *et on choisit* $a_i \in C\cap]b_{i-1}, b_i[$ *et* $\alpha_i = \varphi(a_i)$. *On pose* $\psi = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$.
> *La fonction* ψ *est bien dans* S *car* $\alpha_i \neq 0$ *seulement pour un nombre fini de* i.
> *D'autre part, on a bien* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$. *En effet, soit* $x \in \mathbb{R}$. *Il existe* $i \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x \in]a_{i-1}, a_i]$, *on a donc*
> $$|\varphi(x) - \psi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(a_i)| \leq \varepsilon \text{ car } |x - a_i| \leq |a_{i-1} - a_i| \leq |b_{i-2} - b_i| = \eta.$$

(d) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$.
[Utiliser la question 2c.]

Corrigé –
Soit $\varepsilon > 0$. *La question 2c donne l'existence de* $\psi \in S$ *t.q.* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \le \varepsilon$. *On a alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| \\
&\quad \le |\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm_n| + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm| + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| \\
&\qquad \le 2\varepsilon + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm|.
\end{aligned}
$$

Comme $\psi \in S$, *il existe* n_0 *tel que* $n \ge n_0$ *implique* $|\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm| \le \varepsilon$. *On a donc, pour tout* $n \ge n_0$,

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| \le 3\varepsilon.$$

Ce qui termine la question.

(e) Déduire de la question précédente que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *La question 2d donne la converge vague de* m_n *vers* m *et donc la converge étroite de* m_n *vers* m *(car* m_n *et* m *sont des probabilités). On a donc* $X_n \to X$ *en loi quand* $n \to +\infty$.

Exercice 6.67 (Convergence en loi) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. réelle de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que $-X$ est une v.a. de même loi que X.

Corrigé – *On pose* $Y = -X$ *et on cherche à déterminer la loi de la v.a.r.* Y. *Soit* φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(il suffit en fait de prendre pour* φ *la fonction caractéristique d'un borélien de* $\mathbb{R}$*). En posant* $\psi(x) = \varphi(-x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *On remarque que* $\int_{\Omega} \varphi(Y) dP = \int_{\Omega} \varphi(-X) dP = \int_{\Omega} \psi(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(-x) dP_X(x)$. *Comme* $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$, *on a donc :*

$$\int_{\Omega} \varphi(Y) dP = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(-x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(x) dx,$$

ce qui prouve que $Y \sim \mathcal{U}(-1, 1)$.

2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. t.q. :

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X,

(b) $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers 0.

Corrigé – *On prend* $X_n = -X$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On a donc* $P_{X_n} = P_X$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *ce qui donne bien la convergence en loi de* X_n *vers* X *quand* $n \to +\infty$. *Mais,* $X_n - X = -2X$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et donc* $X_n - X$ *ne converge pas en loi vers* 0 *car* $P_0 = \delta_0$ *et* $P_{-2X} \neq \delta_0$. *(Il est facile de voir, en raisonnant comme à la première question, que* $-2X \sim \mathcal{U}(-2,2)$.*)*

3. Donner un exemple de trois v.a. X, Y, Z t.q. X et Y aient la même loi, mais sans que XZ et YZ aient la même loi.

Corrigé – *On prend* $Y = -X$ *(toujours avec* $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$*) et* $Z = X$. *les v.a.r.* X *et* Y *ont donc même loi. Mais, on va montrer que* XZ *et* YZ *n'ont pas la même loi. En effet, soit* φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a :*

$$\int_\Omega \varphi(XZ)dP = \int_\Omega \varphi(X^2)dP = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x^2)dx$$
$$= \int_0^1 \varphi(x^2)dx = \int_0^1 \varphi(s)\frac{1}{2\sqrt{s}}ds.$$

Ce qui prouve que $P_{XZ} = g\lambda$ *avec* $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *pour* $x \in]0,1[$ *et* $g(x) = 0$ *si* $x \notin]0,1[$.
Comme $XY = -XZ$, *on a* $P_{XY} = h\lambda$ *avec* $h(x) = g(-x)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$. *On en déduit que* $P_{XZ} \neq P_{XY}$.

Exercice 6.68 (Convergence en loi + convergence en probabilité) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. réelles telles que :

$$X_n \to X \text{ en loi, } Y_n \to 0 \text{ en probabilité, quand } n \to +\infty.$$

Montrer que
$$X_n + Y_n \to X \text{ en loi, quand } n \to +\infty.$$

[On pourra utiliser la convergence vague.]

Corrigé – *D'après la proposition 6.87, il suffit de démontrer la convergence vague de* $P_{X_n+Y_n}$ *vers* P_X *quand* $n \to +\infty$, *c'est-à-dire que* $\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP = \int_\Omega \varphi(X)dP$ *pour tout* $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *On a* $\int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP - \int_\Omega \varphi(X)dP = A_n + B_n$ *avec :*

$$A_n = \int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP - \int_\Omega \varphi(X_n)dP, \qquad B_n = \int_\Omega \varphi(X_n)dP - \int_\Omega \varphi(X)dP.$$

On sait déjà que $\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$ *(car* $X_n \to X$ *en loi). Il suffit donc de montrer que* $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$.

Soit $\eta > 0$. *Comme* $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, φ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *(on rappelle, par contre, que* $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \not\Rightarrow \varphi$ *uniformément continue), il existe donc* $\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \varepsilon \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \eta.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\|\varphi\|_u = \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|(< \infty)$:

$$\begin{aligned}|\mathrm{A}_n| &\leq \int_{|\mathrm{Y}_n|\leq\varepsilon} |\varphi(\mathrm{X}_n + \mathrm{Y}_n) - \varphi(\mathrm{X}_n)| d\mathrm{P} + \int_{|\mathrm{Y}_n|>\varepsilon} |\varphi(\mathrm{X}_n + \mathrm{Y}_n) - \varphi(\mathrm{X}_n)| d\mathrm{P} \\ &\leq \eta + 2\|\varphi\|_u \mathrm{P}[|\mathrm{Y}_n| > \varepsilon].\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Y}_n \to 0$ en probabilité, il existe n_0 (dépendant seulement de ε et donc de η et φ) tel que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow 2\|\varphi\|_u \mathrm{P}[|\mathrm{Y}_n| > \varepsilon] \leq \eta,$$

et donc :

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\mathrm{A}_n| \leq 2\eta.$$

Ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = 0$ et termine la démonstration.

Exercice 6.69 (Convergence en loi versus convergence en probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, X une v.a. réelle et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.

1. On suppose, dans cette question, que $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en probabilité, quand $n \to +\infty$. Montrer que :

$$\mathrm{X}_n \to \mathrm{X} \text{ en loi, quand } n \to +\infty.$$

[Remarquer qu'il suffit de démontrer une convergence vague de $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}$ vers P_X.]

Corrigé – *Soit $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Nous allons montrer que*

$$\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n) d\mathrm{P} \to \int_\Omega \varphi(\mathrm{X}) d\mathrm{P},$$

quand $n \to +\infty$ (ce qui prouve la convergence vague de $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}$ vers P_X, quand $n \to +\infty$, voir la définition 6.86).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, φ est uniformément continue (ceci serait faux si on prenant φ arbitrairement dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n) - \varphi(\mathrm{X}) d\mathrm{P}\right| &\leq \int_{|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}|\leq\eta} |\varphi(\mathrm{X}_n) - \varphi(\mathrm{X})| d\mathrm{P} \\ &+ \int_{|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}|>\eta} |\varphi(\mathrm{X}_n) - \varphi(\mathrm{X})| d\mathrm{P} \leq \varepsilon + 2\|\varphi\|_u \mathrm{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| > \eta),\end{aligned}$$

avec $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(s)|,\ s \in \mathbb{R}\} < \infty$. Comme $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en probabilité, quand $n \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow 2\|\varphi\|_u \mathrm{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| > \eta) \leq \varepsilon.$$

On a donc finalement

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}_n) - \varphi(\mathrm{X}) d\mathrm{P}| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \to \int_\Omega \varphi(X)dP$, *quand* $n \to +\infty$.

Pour conclure, on utilise la proposition 6.87 (qui donne que si $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* m *sont des probabilités sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, la convergence étroite de* m_n *vers* m*, quand* $n \to +\infty$*, est équivalente à la convergence vague de* m_n *vers* m*). On obtient ainsi la convergence étroite de* P_{X_n} *vers* P_X *c'est-à-dire la convergence en loi de* X_n *vers* X*, quand* $n \to +\infty$.

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X = a$ p.s.. On suppose aussi que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to +\infty$. Montrer que :

$$X_n \to X \text{ en probabilité, quand } n \to +\infty.$$

Corrigé – *Soit* $\eta > 0$*, on va montrer que* $P(|X_n - X| > \eta) \to 0$*, quand* $n \to +\infty$*. Pour cela, on choisit une fonction* φ *continue bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et telle que* $\varphi(x) = 1$ *si* $|x - a| \geq \eta$*,* $\varphi(a) = 0$ *et* $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. (Une telle fonction est facile à construire, il suffit de la prendre affine par morceaux). Comme* $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, on a* $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \to \int_\Omega \varphi(X)dP$*, quand* $n \to +\infty$*. Comme* $X = a$ *p.s. et* $\varphi(a) = 0$*, on a* $\int_\Omega \varphi(X)dP = 0$*. Enfin, comme* $\varphi(x) = 1$ *si* $|x - a| \geq \eta$ *et* $\varphi \geq 0$*, on a* $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \geq P(|X_n - X| > \eta)$*. On en déduit finalement que* $P(|X_n - X| > \eta) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc que* $X_n \to X$ *en probabilité quand* $n \to +\infty$.

Mesure-Intégration-Probabilités, DM1, janvier 2021

Exercice 1 (Convergence p.p. et convergence L^1)**.**
Soit (X, T, m) est une espace mesuré. Pour $1 \le p \le +\infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$.
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^1 et f une application mesurable de f dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 et que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que f appartient à L^1 (plus précisément, $f \in \mathcal{L}^1$ et on confond f avec avec sa classe).
2. En prenant $(X, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$, donner un exemple pour lequel f_n ne converge pas vers f dans L^1 quand $n \to +\infty$.

Pour la suite de l'exercice, on ajoute qu'il existe $p > 1$ tel que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^p.

3. On suppose que $m(X) < +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 (quand $n \to +\infty$) et donner un exemple pour lequel f_n ne converge pas vers f dans L^p (on pourra prendre $(X, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$).
4. On suppose que $m(X) = +\infty$. A t on $f_n \to f$ dans L^1 ? (Si oui, le démontrer. Si non, donner un exemple).

Exercice 2 (Chaine de Markov)**.**
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une espace probabilisé et G un ensemble de cardinal m ($m \in \mathbb{N}^\star$). Une variable aléatoire à valeurs dans G est donc une application X de Ω dans G telle que $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ pour toute partie A de G.
On pose $G = \{a_1, \ldots, a_m\}$ (comme m est le cardinal de G, on a donc $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$).
Rappels :

— Si X est une variable aléatoire (à valeurs dans G) et $a \in G$, on pose $\{X = a\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = a\}$.

— Si X est une variable aléatoire (à valeurs dans G), la loi de X est donnée par l'ensemble $\{P(\{X = a\}), a \in G\}$. Si on identifie G avec $\{1, \ldots, m\}$, cette loi est une probabiblité sur les boréliens de $\mathbb{R}$, notée P_X, et $P_X = \sum_{i=1}^m P(\{X = a_i\})\delta_i$ (où δ_i est la mesure de Dirac en i).

— Soient A, $B \in \mathcal{F}$. Si $P(B) \neq 0$, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Si $P(B) = 0$, $P(A|B) = 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires (à valeurs dans G).
On suppose que pour i, $j \in \{1, \ldots, m\}$, il existe $T_{i,j}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\{a_{j_k}, k < n\}$,

$$P(\{X_{n+1} = a_j\}|\{X_n = a_i\} \cap (\cap_{j<n}\{X_k = a_{j_k}\}) = P(\{X_{n+1} = a_j\}|\{X_n = a_i\}) = T_{i,j}.$$

On note T la matrice (de m lignes et m colonnes) dont la composante à la ligne i, colonne j, est $T_{i,j}$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\sum_{j=1}^m T_{i,j} = 1$.
2. Montrer que pour tout i, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $P(\{X_2 = a_j\}|\{X_0 = a_i\}) = (T^2)_{i,j}$, où $(T^2)_{i,j}$ est la composante à la ligne i colonne j de la matrice T^2.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et i, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $P(\{X_n = a_j\}|\{X_0 = a_i\}) = (T^n)_{i,j}$, où $(T^n)_{i,j}$ est la composante à la ligne i colonne j de la matrice T^n. [On pourra faire une récurrence sur n.]

On suppose pour la suite de l'exercice que $m = 3$ et $T = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} T^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
5. Montrer qu'il existe une unique loi stationnaire, c'est-à-dire un unique choix de l'ensemble $\{P(\{X_0 = a_i\}), i \in \{1, 2, 3\}\}$ tel que $P(\{X_n = a_i\}) = P(\{X_0 = a_i\})$ pour tout n et tout i.
6. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en probabilité quelquesoit le choix de X_0 ? Si oui, quelle est cette limite ? La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle p.s. quelquesoit le choix de X_0 ? (Justifier les réponses).

Exercice 3 (Un exemple simple de suite de v.a.r.i.i.d)**.**
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a.r.i.i.d..
On suppose que la loi de X_0 est $P(\{X_0 = 1\}) = P(\{X_0 = -1\}) = 1/2$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k/k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathcal{B}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{B}_n$ est la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$). Montrer que pour toute v.a.r. φ, $\mathcal{B}_n$-mesurable bornée, $E(S_{n+1}\varphi) = E(S_n\varphi)$.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ quand $n \to +\infty$. On note S la limite (dans L^2) de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Donner l'espérance et la variance de S.