Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1. Soit θ un nombre réel. Nous avons

$$\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n=\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}}\right)^n=\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{-i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})}\right)^n=\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right)^n=(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}.$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6+(7-i)z^3-8-8i$ est équivalent à résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} Z^2+(7-i)Z-8-8i=0 & (1)\\ Z=z^3. & (2)\end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré (1) est $\Delta=(7-i)^2+4(8+8i)=49-1-14i+32+32i=80+28i$.

Cherchons les racines carrées de $80+28i$. Si $z=x+iy$ vérifie $z^2=(x^2-y^2)+2xyi=80+18i$, alors

$$\begin{cases} x^2-y^2=80 & (3)\\ xy=9. & (4)\end{cases}$$

Nous avons aussi $x^2+y^2=|z|^2=|80+18i|=\sqrt{(80)^2+(18)^2}=\sqrt{6400+324}=\sqrt{6724}=82$, d'où grâce à (3), $x^2=81$ ce qui nous donne $x=9$ ou bien $x=-9$.

On en déduit alors, grâce à (4), que $y=1$ ou bien $y=-1$. Nous avons donc obtenu que les racines de Δ sont $9+i$ et $-9-i$.

Et donc, les solutions de (1) sont

$$Z_1=\frac{(-7+i)+(9+i)}{2}=1+i \qquad \text{et} \qquad Z_2=\frac{(-7+i)-(9+i)}{2}=-8$$

Les solutions de l'équation proposée sont alors les $z\in\mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z^3=1+i & (5)\\ \text{ou } z^3=-8. & (6)\end{cases}$$

Comme $(1+i)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, nous en déduisons que les solutions de (5) sont

$$\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\qquad \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}},\qquad \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}},$$

et comme $-8=8e^{i\pi}$, nous en déduisons que les solutions de (6) sont

$$2e^{i\frac{\pi}{3}},\qquad 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}=-2,\qquad 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est donc

$$\left\{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}},\sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}},2e^{i\frac{\pi}{3}},-2,2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$$

Exercice 3.

- 1. La fonction $g(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ est définie si et seulement si $1 - x^2 \geq 0$, ce qui équivaut à $x \in [-1,1]$.

  Pour $x \in [-1,1]$, nous avons $g(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq \sqrt{1-x^2}$. Il est donc clair que c'est impossible si $x \in [-1,0[$.

  Supposons $x \in [0,1]$. Nous avons

$$(x \geq \sqrt{1-x^2}) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right].$$

  Nous avons donc obtenu que

$$g(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right].$$

- 2. La fonction f est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ car il en est de même pour la fonction arcsin et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

  Nous avons donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' e^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2}\left(e^{\arcsin x}\right)' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2}\left(\arcsin' x\, e^{\arcsin x}\right)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, e^{\arcsin x}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) e^{\arcsin x} = -\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x}.$$

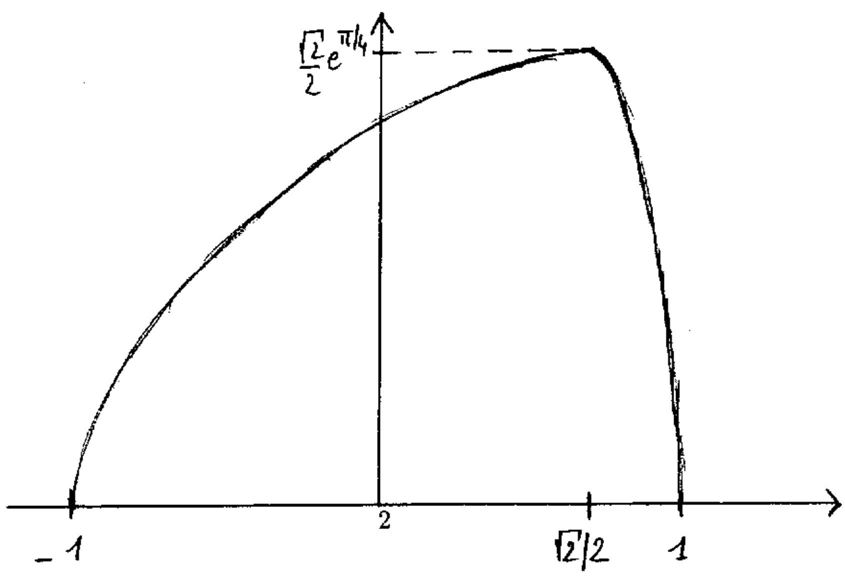
  Nous en déduisons que la fonction f est croissante sur $\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

  Nous avons $f(-1) = f(1) = 0$. Enfin $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\, e^{\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$.

  De plus,

$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1-} f'(x) = -\infty,$$

  d'où le graphe :



Exercice 4.

- 1. Les solutions de $z^5 = 1$ sont les racines cinquième de l'unité, c'est-à-dire 1, u, u^2, u^3 et u^4 si $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

- 2. Nous avons $1+u+u^2+u^3+u^4+u^5 = \frac{u^5-1}{u-1}$ car $u \neq 1$. Comme $u^5 = 1$, nous obtenons donc que

$$1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0.$$

Nous avons $u + u^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

De même, $u^2 + u^3 = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Donc

$$1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 1 + (u + u^4) + (u^2 + u^3) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

- 3. Comme $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$, nous obtenons donc

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right) = 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0.$$

Les solutions de l'équation $4x^2 + 2x - 1$ sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 5.

- 1. sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :

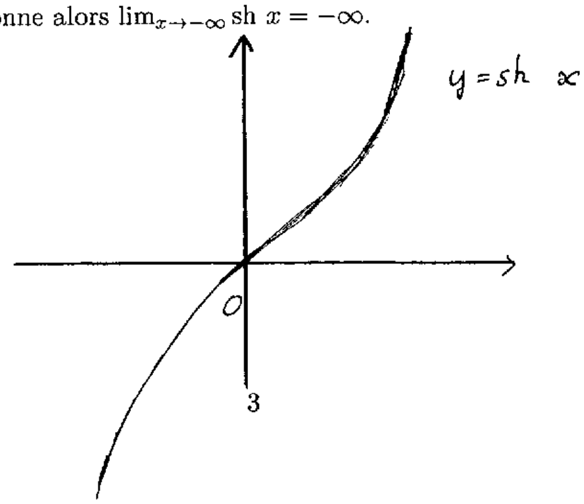
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La fonction sh est impaire. De plus sa dérivée est ch, qui est strictement positive, donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = +\infty$, et que sh $x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \text{sh}\, x = +\infty.$$

L'imparité de sh nous donne alors $\lim_{x\to-\infty} \text{sh}\, x = -\infty$.



- 2. La fonction argsh va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et c'est l'application qui à $y \in \mathbb{R}$ associe l'unique $x \in \mathbb{R}$ tel que sh $x = y$. Nous avons donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad y = \operatorname{sh} x \quad \Leftrightarrow x = \operatorname{argsh} y,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = x.$$

En particulier, si x et y sont deux réels, nous avons

$$x = \operatorname{argsh} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \operatorname{sh} x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 2y - e^{-x} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \qquad \text{car } e^x > 0.$$

On obtient donc que $X = e^x$ est la solution strictement positive de l'équation

$$X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

Le discriminant est $(2y)^2 + 4 = 4(y^2+1)$, donc

$$X = y + \sqrt{y^2+1}$$

(l'autre solution de l'équation de degré 2 est strictement négative puisque le produit des deux solutions vaut -1). On obtient donc que

$$\operatorname{argsh} y = x = \ln X = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

La fonction argsh est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}' x = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 6. Si $|a| = |b| = |c| = 1$, alors $|abc| = 1$. Nous avons donc

$$|ab+bc+ca| = \frac{|ab+bc+ca|}{|abc|} = \left|\frac{ab+bc+ca}{abc}\right| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|.$$

Comme a, b et c sont de modules 1, nous avons $\frac{1}{a} = \overline{a}$, $\frac{1}{b} = \overline{b}$ et $\frac{1}{c} = \overline{c}$, et donc

$$\left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| = |\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}| = |\overline{a+b+c}| = |a+b+c|.$$