Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales 1

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Exercice 1 1. Nous avons $-\frac{81}{2}(1+i\sqrt{3}) = 81e^{i\frac{4\pi}{3}} = 3^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation proposée sont donc

$$3e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad 3e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}, \qquad 3e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = 3e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \qquad 3e^{i\left(\frac{\pi}{3}+3\frac{\pi}{2}\right)} = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

2. Les racines cherchées sont alors égales à $3e^{i\pi/3}$ multiplié par les racines quatriémes de l'unité. Ce sont donc

$$3e^{i\pi/3}, \qquad 3e^{i\pi/3}i, \qquad -3e^{i\pi/3}, \qquad -3e^{i\pi/3}i.$$

3. La somme des racines est donc

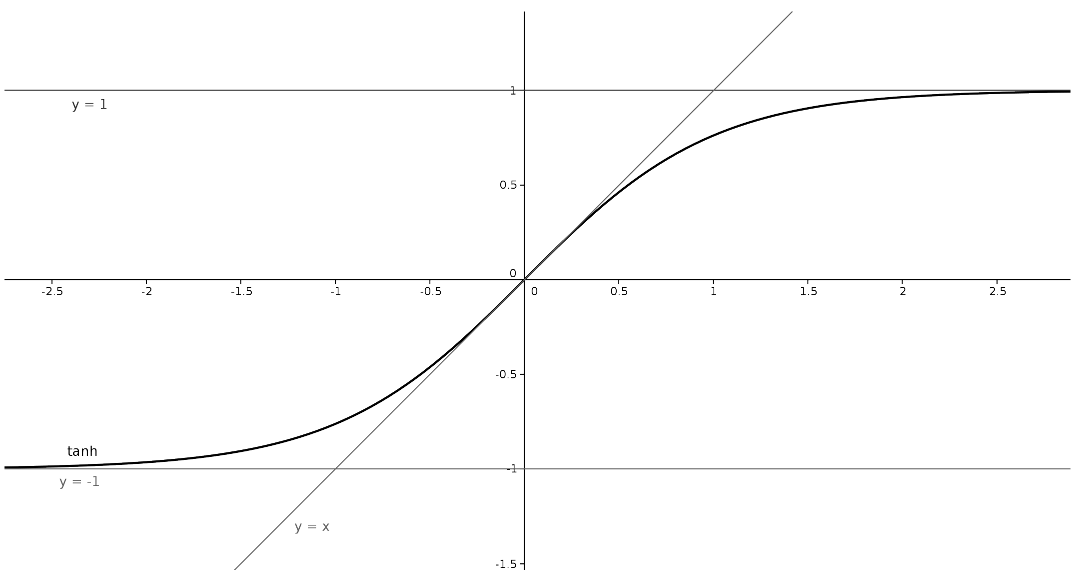
$$3e^{i\pi/3}(1+i-1-i) = 0.$$

De maniére plus générale, la somme des racines $n-$ièmes d'un nombre complexe quelconque est nulle.

Exercice 2 1. La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. On en déduit que th est strictement croissante. La fonction th est aussi impaire. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{th} x = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

et que e^{-2x} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\operatorname{th} x$ tend vers 1 quand $x \to +\infty$. Le caractère impair de th nous donne alors $\lim_{-\infty} \operatorname{th} = -1$. D'où l'allure du graphe :



2. La fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. Sa bijection réciproque est une application bijective de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ appelée arg th. Pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\operatorname{arg\,th} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th} y = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x \quad \Leftrightarrow \quad (e^{2y}-1) = (e^{2y}+1)x$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2y}(1-x) = 1+x \quad \Leftrightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3. On en déduit que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{arg\,th}' x = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]' = \frac{1}{2}[\ln(1+x)]' - \frac{1}{2}[\ln(1-x)]' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 1$. Nous avons aussi $\frac{x^2-1}{x^2+1} > -1$ si et seulement si $x^2 - 1 > -x^2 - 1$, soit si et seulement si $2x^2 > 0$, soit si et seulement si $x \neq 0$.
   On peut donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, considérer $\operatorname{arg\,th}\left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)$. Nous avons alors
$$\operatorname{arg\,th}\left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{x^2-1}{1+x^2}}{1-\frac{x^2-1}{1+x^2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1+x^2+x^2-1}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-x^2+1}{1+x^2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{\frac{2}{1+x^2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2\right) = \ln|x|.$$

Exercice 3 1. f est dérivable comme somme de puissances de fonctions dérivables. Nous avons :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x.$$

2. Nous avons alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 4\sin x \cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 2(2\sin x \cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x) =$$
$$= 2(\sin 2x)(-\cos 2x) = -\sin 4x.$$
   En intégrant cette égalité, nous obtenons
$$f(x) = \frac{1}{4}\cos(4x) + C$$
   où C est une constante. Or $f(0) = \sin^4 0 + \cos^4 0 = 1 = C + \frac{1}{4}\cos(4 \times 0) = C + \frac{1}{4}$. Donc $C = \frac{3}{4}$. Nous avons donc obtenu :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3+\cos(4x)}{4}.$$

Exercice 4 Le discriminant de l'équation est
$$\Delta = (7+2i)^2 - 4(13+13i) = 49 - 4 + 28i - 52 - 52i = -7 - 24i$$
Si $z = a + ib$ est une racine de Δ, nous avons
$$a^2 - b^2 = -7 \qquad \text{et} \qquad 2ab = -24.$$
Or $a^2 + b^2 = |z|^2 = |\Delta| = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$. Nous obtenons donc $a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 = 18$. Donc $a^2 = 9$, ce qui implique que $a = \pm 3$.

L'égalité $2ab = -24$ nous donne alors $b = -\frac{12}{a}$. Les racines de Δ sont donc $3 - 4i$ et $-3 + 4i$.

On en déduit que les racines de l'équation proposée sont
$$\frac{7+2i+3-4i}{2} = 5 - i \qquad \text{et} \qquad \frac{7+2i-3+4i}{2} = 2 + 3i.$$

Exercice 5 1. $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ est défini si et seulement si $1 - x^2 \geq 0$, ce qui équivaut à $x \in [-1,1]$ et si
$$-1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2(1-x^2) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(1-x^2) \leq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

ce qui est toujours le cas.

On en déduit que la fonction f est définie sur $[-1, 1]$. Elle est de plus dérivable en x si et seulement si $2x\sqrt{1-x^2}$ est différent de ± 1 (car la fonction arc sin n'est pas dérivable en ± 1) et si $x \neq \pm 1$ (car en ces points la fonction $\sqrt{1-x^2}$ n'est pas dérivable), donc si et seulement si

$$4x^2(1-x^2) \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(1-x^2) \neq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \neq 0$$

et si $x \neq \pm 1$.

La fonction f est donc dérivable sur $]-1, 1[\setminus \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Nous avons alors

$$\forall x \in]-1,1[\setminus \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \qquad f'(x) = \frac{(2x\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-(2x\sqrt{1-x^2})^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2} + 2x\frac{\frac{1}{2}\times(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} =$$

$$= \frac{\frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1-2x^2}{\sqrt{(1-2x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1-2x^2}{|1-2x^2|}.$$

Nous avons donc

$$\forall x \in \left]-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[, \qquad f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[, \qquad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[, \qquad f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Comme les fonctions $2\arcsin x$ et $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ ont la même dérivée sur $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, on en déduit que

$$2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) + C$$

où C est une constante sur $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Si on fait $x = 0$, on obtient que $C = 0$, donc $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ sur $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Enfin cette égalité est encore valable en $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ puisque les deux fonctions f et arcsin sont continues.

Nous avons donc obtenu que

$$\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \qquad 2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

3. Pour $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, nous avons $x = \sin\theta$ avec $\theta = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Or $2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ (car $\cos\theta \geq 0$), donc $2x\sqrt{1-x^2} = \sin 2\theta$.

Comme $2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons alors

$$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \arcsin(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\arcsin x.$$