Devoir surveillé 2

Exercice 1:

Soit $(G,*)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on définit l'application

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ x & \mapsto & a * x * a^{-1} \end{array}.$$

(1) Que vaut φ_a pour tout a si le groupe $(G,*)$ est commutatif ?

Dans toute la suite, on suppose le groupe $(G,*)$ non commutatif.

(2) Reconnaître φ_e.

(3) Montrer que φ_a est un homomorphisme de groupes.

(4) Prouver que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a*b}$, pour tout a, b appartenant à G.

(5) En déduire que φ_a est bijectif, en donnant φ_a^{-1}.

(6) On note $\mathrm{Int}(G)$ l'ensemble $\{\varphi_a \mid a \in G\}$. Que peut-on dire de $\mathrm{Int}(G)$ muni de la loi $\circ$ de composition des application ?

(7) Un exemple : On prend $G = S_3$, le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$. On choisit $a = (1,2)$. Ecrire en extension l'ensemble S_3, puis déterminer $\varphi_{(1,2)}((1,2))$ et $\varphi_{(1,2)}((1,2,3))$.

(8) Soit Φ l'application définie par

$$\Phi : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathrm{Int}(G) \\ a & \mapsto & \varphi_a \end{array}$$

a) Montrer que Φ est un homomorphisme de groupe de $(G,*)$ dans $(\mathrm{Int}(G), \circ)$.

b) Compléter : $a \in \mathrm{Ker}\ (\Phi) \Leftrightarrow \Phi(a) = \cdots \Leftrightarrow \varphi_a = \cdots \Leftrightarrow \forall x \in G, \quad \ldots$

$\Leftrightarrow \forall x \in G,\ a * x = \cdots \Leftrightarrow a \in \ldots.$ En déduire Ker (Φ).

Exercice 2:

Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

(1) Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, \times)$

(2) Soit le polynôme $P_6 = X^6 - 1$. Donner les racines de P_6 et sa décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines du polynôme $P_n = X^n - 1$ et donner leur ordre. En déduire la forme factorisée dans $\mathbb{C}$ de ce polynôme. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines de $X^n - 1$.

(4) Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$

(5) Effectuer la division euclidienne de P_{16} par P_4, puis de P_{11} par P_3.

(6) Montrer que si un entier m divise n, toutes les racines du polynôme $X^m - 1$ sont également des racines du polynôme $X^n - 1$.

(7) En déduire que dans ce cas que le polynôme $X^m - 1$ divise le polynôme $X^n - 1$