

## Mathématiques Générales 1

## DEVOIR SURVEILLÉ N°2

**Exercice 1** *Borne supérieure* (2 points)

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ , écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes

1.  $m$  est un minorant de  $A$
2.  $P$  n'est pas un majorant de  $A$
3.  $A$  est majorée
4.  $A$  n'est pas minorée

**Exercice 2** *Borne supérieure* (3 points)

Soit  $E$  l'ensemble des réels de la forme  $(1 - 1/n)/(1 + 1/n)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'ensemble  $E$  admet-il une borne inférieure ? une borne supérieure ? Si oui, quelles sont-elles ?

**Exercice 3** *Equation complexe* (3 points)

1. Déterminer l'inverse de  $-1 + i$
2. Résoudre l'équation

$$\frac{2w}{1-w} = -1 + i$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation

$$\frac{1 - z^5}{2z^5} = -(1 + i)/2$$

**Exercice 4** *Complexes* (4 points)

1. On considère dans le plan complexe les trois points distincts  $M$  d'affixe  $z \in \mathbb{C}$ ,  $A$  d'affixe  $a \in \mathbb{C}$  et  $B$  d'affixe  $b \in \mathbb{C}$ . Montrez que  $A$ ,  $B$  et  $M$  sont alignés si et seulement si  $\frac{z-a}{z-b}$  est réel.
2. On considère dans le plan complexe les points  $A$  d'affixe 1 et  $B$  d'affixe  $-1$ .  
A tout point  $M$  d'affixe  $z \neq 1$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$ .
  - (a) Etablissez que  $|z'| = 1$ .
  - (b) Etablissez que  $\frac{z'-1}{z-1}$  est réel.
  - (c) Donner une construction géométrique du point  $M'$  connaissant  $M$ .

**Exercice 5** *Dénombrement* (4 points)

1. Soit un ensemble  $E$  de cardinal  $n \geq 2$  et  $a$  et  $b$  deux éléments distincts de  $E$ . Déterminer le nombre de parties de  $E$  à  $p$  éléments qui :

- (a) contiennent  $a$  et  $b$ ;
- (b) contiennent  $a$  mais pas  $b$  ou bien  $b$  mais pas  $a$ ;
- (c) ne contiennent ni  $a$  ni  $b$ ;

En déduire que pour tout entier naturel  $p$  et tout entier naturel  $n \geq p + 2$ , on a :

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}.$$

2. Retrouvez le résultat par un calcul direct ;

**Exercice 6** *Dénombrement* (6 points)

Soit un ensemble  $E$  de cardinal  $n$ .

- 1. Trouver le nombre de couples  $(X, Y)$  de parties de  $E$  telles que  $X \cap Y = \emptyset$  et  $X \cup Y = E$  (pour une partie  $X$  donnée, on pourra identifier toutes les parties  $Y$  possibles)
- 2. Trouver le nombre de couples  $(X, Y)$  de parties de  $E$  telles que  $X \cap Y = \emptyset$ .
- 3. Trouver le nombre de couples  $(X, Y)$  de parties de  $E$  telles que  $X \cup Y = E$ .
- 4. Trouver le nombre de couples  $(X, Y)$  de parties de  $E$  telles que  $X \subset Y$  (pour une partie  $Y$ , on pourra compter le nombre de parties  $X$  satisfaisant à la condition).
- 5. Trouver le nombre de triplets  $(X, Y, Z)$  de parties de  $E$  telles que  $X \subset Y \subset Z$ . (pour une partie  $Z$  donnée, on pourra compter le nombre de parties  $X$  et  $Y$  possibles, en se ramenant à la question précédente).
- 6. Trouver le nombre de triplets  $(X, Y, Z)$  de parties de  $E$  telles que  $X \subset Z$  et  $Y \subset Z$ .