

**Mathématiques Générales 1**

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

DURÉE 2H

*Il sera tenu compte de la présentation et de la précision de la rédaction, particulièrement dans l'exercice 2.*

**Il est demandé de rendre impérativement 2 copies :**  
**l'une comportant les exercices 1 et 2, l'autre, les exercices 3,4,5,6.**

**Exercice 1** *équations différentielles* (6 pts)

1. **Ordre 1.** Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle suivante, avec la condition initiale  $y(1) = 0$  :

$$(x^2 + 1)y' = \frac{3x^2 + 1}{x} y + x(x^2 + 1)$$

2. **Ordre 2.** Soit l'équation différentielle  $y'' + 3y' + 2y = f(x)$ , où  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .
- (a) La résoudre avec les conditions initiales  $y(0) = y'(0) = 0$ , lorsque  $f(x) = e^x$  puis lorsque  $f(x) = x^2$ .
- (b) En déduire les solutions de l'équation  $y'' + 3y' + 2y = e^x + x^2$ , toujours avec les mêmes conditions initiales.

**Exercice 2** *Applications* (5 pts)

Soit  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ .

1. Donner la définition de  $f$  injective,  $f$  surjective et  $f$  bijective.
2. Rappeler la définition de  $f(A)$  pour  $A \subset X$ , et de  $f^{-1}(A')$  pour  $A' \subset Y$ .
3. Que peut-on dire sur  $f$  si  $\exists y \in Y, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ ?
4. Que peut-on dire sur  $f$  si  $\exists y \in Y, f^{-1}(\{y\}) = \{\alpha, \beta\}$ ?
5. Dans quel cas a-t-on  $f(X) = Y$  ? et  $f^{-1}(Y) = X$  ?
6. Si  $A'$  et  $B'$  sont deux parties de l'ensemble  $Y$ , prouver que  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ .
7. Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de l'ensemble  $X$ , prouver que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

TSVP →

**Exercice 3 Applications** (2 pts)

Soient  $X = Y = \mathbb{R}$  et la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \text{th}(\text{ch}(x))$ .

1.  $f$  est-elle injective ? surjective ? *justifier*.
2. Déterminer  $f^{-1}([2; +\infty[)$ , ainsi que  $f(\mathbb{R})$ .

**Exercice 4 Ensembles** (2 pts)

Soient  $E$  un ensemble non vide et  $A, B, C$ , trois parties de  $E$ . Démontrer que :

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap B^c = A \cap C^c .$$

**Exercice 5 Dénombrement** (2 pts)

Au loto il y a 49 numéros : 1 2 ... 48 49. Une grille de loto est composée de 6 chiffres.

1. Combien peut-on écrire de grilles différentes ?
2. Combien peut-on écrire de grilles différentes comprenant uniquement des multiples de 5 ?

*On justifiera brièvement les réponses.*

**Exercice 6 Dénombrement** (5 pts)

Un clavier de 9 touches numérotées : 1 2 3 4 5 6 A B C permet de composer le code d'entrée d'un immeuble constitué d'une lettre suivie de d'un nombre à 3 chiffres distincts ou non.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?
6. Combien y a-t-il de codes comportant uniquement les chiffres 2,3 et 5 ?

*On justifiera brièvement toutes les réponses.*