Devoir 2 - Correction exercice 2

(1) On a $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$. En effet, tout nombre complexe de module 1 n'est pas nul, donc appartient à $\mathbb{C}^*$.
On a $\mathbb{U} \neq \emptyset$, car $1 \in \mathbb{U}$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{U}$, on a $|xy^{-1}| = |x||y^{-1}| = |y|^{-1} = 1$, et donc $xy^{-1} \in \mathbb{U}$.
Par conséquent, $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

(2) On cherche les solutions de l'équation $x^6 - 1 = 0$. On pose $x = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\begin{aligned} x^6 &= 1 \\ (re^{i\theta})^6 &= e^0 \\ r^6 e^{6i\theta} &= e^0. \end{aligned}$$

En prenant les modules, on obtient $r^6 = 1$ et $r = 1$, car $r \in \mathbb{R}^+$. Par conséquent, on a $e^{6i\theta} = e^0$, soit

$$\begin{aligned} 6\theta &= 0 \quad [2\pi] \\ \theta &= 0 \quad [\frac{2\pi}{6}] \\ \theta &= 0 \quad [\frac{\pi}{3}]. \end{aligned}$$

L'ensemble des racines de P_6 est donc

$$\mathcal{S} = \{e^{\frac{k\pi}{3}} \mid k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 5\}.$$

On a, dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P_6(X) &= (X - e^{\frac{0\times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{1\times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2\times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{3\times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{4\times i\pi}{3}})(X - e^{\frac{5\times i\pi}{3}}) \\ &= (X-1)(X+1)(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}). \end{aligned}$$

[On aurait raisonner de façon suivnte : On a $X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1)$. Donc x est racine de $P(X)$ si et seulement si x est racine de $H_1(X) = X^3 - 1$ ou x est racine de $H_2(X) = x^3 + 1$. On a $x_1 = 1$ racine évidente de $H_1(x)$. Ainsi,

$$H_1(X) = (X-1)(X^2 + X + 1).$$

Les racines de $X^2 + X + 1$ sont $x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. De même, $x_4 = -1$ est racine évidente de $H_2(X)$ et

$$H_2(X) = (X+1)(X^2 - X + 1).$$

Les racines de $X^2 - X + 1$ sont $x_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $x_6 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.]
Pour factoriser dans $\mathbb{R}$, on regroupe par 2 les facteurs dans la factorisation dans $\mathbb{C}$ où apparait une racine complexe non-réelle et sa conjuguée. On obtient, comme factorisation de P_6 dans $\mathbb{R}$:

$$P_6(X) = (X-1)(X+1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

(3) On généralise à P_n la méthode vue précédemment. On cheche les solutions de l'equation $x^n - 1 = 0$. On pose $x = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$r^n e^{ni\theta} = e^0.$$

En prenant les modules, comme $r \in \mathbb{R}^+$, on a $r = 1$ et donc,

$$\begin{aligned} n\theta &= 0 \quad [2\pi] \\ \theta &= 0 \quad [\frac{2\pi}{n}]. \end{aligned}$$

L'ensemble des racines de P_n est donc
$$\mathcal{S} = \{e^{\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1\}.$$
Il y a donc n racines distinctes. On a, dans $\mathbb{C}$:
$$P_n(X) = (X - e^{\frac{0\times 2i\pi}{n}})(X - e^{\frac{1\times 2i\pi}{n}}) \cdots (X - e^{\frac{(n-1)\times 2i\pi}{n}}).$$
L'ordre de multiplicité de chaque racine est donc 1.

(4) On a $\mathbb{U}_n \neq \emptyset$ car 1 est racine évidente de P_n, donc $1 \in \mathbb{U}_n$.
Soit $x \in \mathbb{U}_n$. On a $x^n = 1$ et donc $|x| = 1$, et $x \in \mathbb{U}$. Ainsi, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.
Soient $x, y \in \mathbb{U}_n$. On a $x^n = 1$ et $y^n = 1$. Par conséquent,
$$(x \times y^{-1})^n = \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} = 1,$$
et donc $xy^{-1} \in \mathbb{U}_n$. Ainsi $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$

(5) On a
$$P_16(X) = (X^4 - 1)(X^{12} + X^8 + X^4 + 1)$$
et
$$P_{11}(X) = (X^3 - 1)(X^8 + X^5 + X^2) + X^2 - 1.$$

(6) On a $n = k \times m$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit x une racine du polynôme $P_m(X)$. On a
$$\begin{array}{rcl} x^m - 1 & = & 0 \\ x^m & = & 1 \\ (x^m)^k & = & 1^k \\ x^{km} & = & 1 \\ x^n & = & 1 \\ x^n - 1 & = & 0. \end{array}$$
Par conséquent, x est aussi racine de P_n.

(7) Toute racine de P_m est racine de P_n, et leur ordre dans P_m est plus petit que leur ordre dans P_n $(1 \leq 1)$. Donc P_m divise P_n.