Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales 1

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Exercice 1 Il manquait un quantificateur dans la définition de la limite $+\infty$ en $+\infty$ (cela a été pris en compte lors de la correction). La voici corrigée.

$$\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > A \Rightarrow f(x) > M.$$

1. Soit M un réel strictement positif, alors en prenant $A = \sqrt{M}$, pour tout $x > A$ on a $g(x) > M$. Donc la fonction g tends vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. $\exists\, M > 0,\ \forall\, A > 0, \exists\, x \in \mathbb{R},\ x > A$ et $f(x) \leq M$.
   Que l'on peut aussi abréger ainsi $\exists\, M > 0,\ \forall\, A > 0, \exists\, x > A,\ f(x) \leq M$.

Exercice 2 1. Si on choisit un polynôme de degré n, on va obtenir dans le membre de droite un polynôme de degré $n + 1$. Comme le membre de gauche est de degré 2, on va donc essayer avec $n = 1$. On cherche donc une solution de la forme $y(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer. En écrivant le membre de gauche pour cette fonction, on obtient

$$a(x-1)(x-2) - (2x-3)(ax+b) = -a\,x^2 - 2bx + (2a+3b)\,.$$

Il est égal au membre de gauche ssi $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ 2a + 3b = -2 \end{cases}$

Cela fait trois équations pour 2 inconnues, mais on voit qu'il existe quand même une seule solution $a = -1$ et $b = 0$. Une solution particulière de l'équation est donc $y = -Id_{\mathbb{R}} : x \mapsto -x$. Remarquons qu'ici la technique de la variation de la constante donne des calculs terriblement plus compliqués.

2. L'équation homogène associée est $(x-1)(x-2)y' - (2x-3)y = 0$. Le coefficient devant y' s'annulle en 1 et 2. On doit donc résoudre sur les trois intervalles $]-\infty, 1[,]1, 2[,]2, +\infty[$ l'équation

$$y' - \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}y = 0\,,$$

et ensuite on verra si on ne peut pas définir des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On calcule une primitive de $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$. Comme c'est une fraction de la forme $\frac{u'}{u}$, une primitive est donnée par $\ln(|u|) = \ln(|(x-1)(x-2)|)$. Sur chacun des trois intervalles, les solutions sont donc de la forme

$$Ce^{\ln(|(x-1)(x-2)|)} = C|(x-1)(x-2)| \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}\,,$$

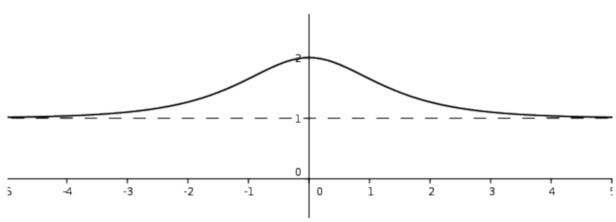
ou encore de la forme $C(x-1)(x-2)$ avec $C \in \mathbb{R}$ (en remplaçant C par $-C$ sur $]1, 2[$ où $(x-1)(x-2)$ est négatif).

Comme la forme générale des solutions sur les trois intervalles est la même, et qu'elle ne présente pas de discontinuités en 1 et 2, on peut dire que les fonctions $C(x-1)(x-2)$, avec $C \in \mathbb{R}$, sont des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ entier.

3. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation non homogène sont dont
$$C(x-1)(x-2) - x \quad C \in \mathbb{R}\,.$$
Pour que la solution vale 0 en 0, on doit choisir $C = 0$. La solution satisfaisant $y(0) = 0$ est donc $y : x \mapsto -x$.

Exercice 3 L'équation homogène associée est $y' + y \,\mathrm{th}\, x = 0$. Pour trouver ses solutions, il faut calculer une primitive de $\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$. Comme $\mathrm{ch}\,' = \mathrm{sh}\,$, on a une fraction du type $\frac{u'}{u}$ et donc une primitive $\ln(\mathrm{ch}\, x)$ (pas besoin de valeur absolue car ch est une fonction strictement positive). Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme
$$Ce^{-\ln(\mathrm{ch}\, x)} = \frac{C}{\mathrm{ch}\,(x)},\ \text{avec } C \in \mathbb{R}\,.$$
Pour une solution particulière, on peut soit utiliser la variation de la constante, ou remarquer que $y : x \mapsto 1$ est bien solution. La variation de la constante : on cherche $y(x) = \frac{C(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$. L'équation devient $\frac{C'(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} = \mathrm{th}\,(x)$ ou encore $C'(x) = \mathrm{sh}\,(x)$. On peut donc choisir $C(x) = \mathrm{ch}\,(x)$ et on obtient bien $y(x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

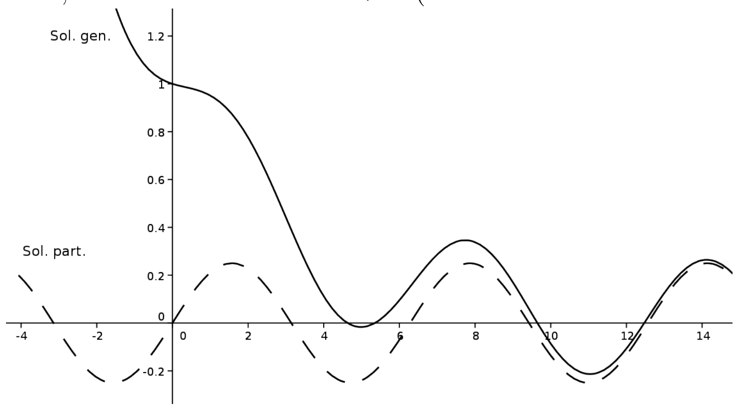
Les solutions de l'équation non homogène sont donc de la forme
$$\frac{C}{\mathrm{ch}\,(x)} + 1, \quad C \in \mathbb{R}$$
La solution vaut 2 en 0 si $C + 1 = 2$. La solution recherchée est donc
$$y(x) = 1 + \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)}$$
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ (car ch ne s'annule jamais), est continue, dérivable comme quotient et somme de fonctions dérivables. Sa dérivée est $y'(x) = -\frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$, qui est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$. La fonction y est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$, maximale en 0 et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{ch}\,(x) = +\infty$, on a $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 1$ et aussi $y(0) = 2$. Cela donne le graphe ci-dessous.



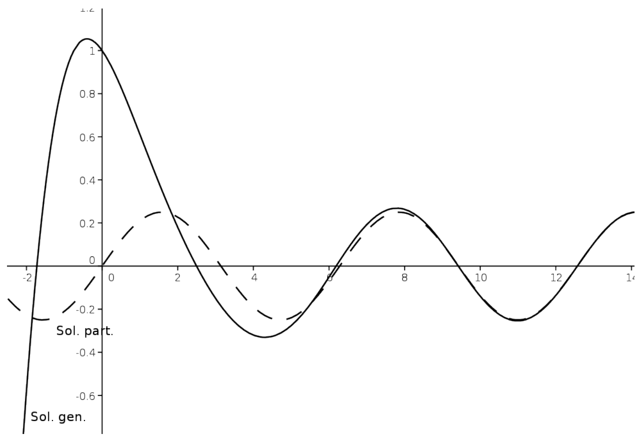
Exercice 4 1. Première possibilité : On cherche une solution de la forme $y(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$. en injectant dans léquation, on trouve
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (-A + 2aB + A)\cos x + (-B - 2aA + B)\sin x = \cos x\,.$$
Ceci n'est possible que si $A = 0$ et $B = \frac{1}{2a}$, donc la solution est
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{\sin(t)}{2a}\,.$$
Seconde possibilité : On remplace le membre de droite par e^{it} et on cherche une solution complexe de la forme Ce^{it} dont on prendra la partie réelle ensuite. On doit donc avoir
$\forall t \in \mathbb{R},\ Ce^{it}(i^2 + 2a\,i + 1) = 2aC\,ie^{it} = e^{it}$, et donc $C = \frac{1}{2a\,i} = -\frac{i}{2a}$. La solution est donc la partie réelle de $\frac{-i}{2a}e^{it} = \frac{\sin(t) - i\cos(t)}{2a}$ et on retrouve le même résultat.

2. Le polynôme associ'ee à l'équation homogène est $X^2 + 2aX + 1$. Son discriminant vaut $\Delta = 4(a^2 - 1)$.
   - Si $a > 1$, $\Delta > 0$ et on a deux racines réelles strictement négatives $\lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $\lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$. Les solutions sont donc de la forme
   $$\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
   - Si $a = 1$, $\Delta = 0$ et on a une racine double réelle $\lambda = -1$. Les solutions sont de la forme
   $$(\alpha t + \beta)e^{-t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
   - Si $0 < a < 1$, $\Delta < 0$ et on a deux racines doubles complexes conjuguées $\lambda = -a \pm i\omega$, avec $\omega = \sqrt{1 - a^2}$. Les solutions sont de la forme
   $$e^{-at}\big(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)\big), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   Dans tous les cas, pour obtenir les solutions de (E) il faut ajouter $\frac{\sin t}{2a}$ aux formes ci-dessus.
3. Dans le cas $a > 1$, on cherche α et β tels que
   $$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = -\frac{1}{2a} \end{cases}$$
   ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{4a\sqrt{a^2-1}} + \frac{a}{2\sqrt{a^2-1}}$ et $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{4a\sqrt{a^2-1}} - \frac{a}{2\sqrt{a^2-1}}$.
   Dans le cas $a = 1$, on obtient le système
   $$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha - \beta = -\frac{1}{2a} \end{cases}$$
   qui admet comme solution $\alpha = 1 - \frac{1}{2a}$ et $\beta = 1$.
   Dans le cas $a < 1$, on obtient le système
   $$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -a\alpha + \beta\omega = -\frac{1}{2a} \end{cases}$$
   qui admet comme solution $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{2a\sqrt{1-a^2}}$.
   Dans les trois cas, les solutions des équations homogènes tendent vers 0 en $+\infty$, les termes en $e^{\lambda t}$ avec $\lambda < 0$ ou e^{-at} l'emportant toujours sur $\cos t, \sin t$ et t. Par contre, la solution particluière $\frac{\sin t}{2a}$ ne converge pas en $+\infty$, elle oscille sans arrêt. Les solutions de l'équation (E) se rapprochent donc de cette solution qui oscille et ne convergent pas non plus.
   Pour l'allure des solutions, cela donne dans le cas $a > 1$ (le cas $a = 1$ est très similaire).



Et dans le cas $a < 1$.



Exercice 5 On rappelle que $(x, y) \in A \times B$ ssi $x \in A$ et $y \in B$.
Si $B = C$, cela ne change rien de remplacer $y \in B$ par $y \in C$ dans la définition ci-dessus. Ce qui veut dire que $A \times B = A \times C$.
Pour la réciproque, comme A n'est pas vide, on peut choisir $a \in A$. Alors comme on sait que a est dans A

$$(a, y) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \text{ et } y \in B \Leftrightarrow y \in B\,.$$

Si $A \times B = A \times C$ on peut donc dire

$$y \in B \Leftrightarrow (a, y) \in A \times B \Leftrightarrow (a, y) \in A \times C \Leftrightarrow y \in C\,,$$

c'est-à-dire$B = C$. On a donc prouvé ce qu'il fallait.

Exercice 6

1. Si pour toute partie X de E on a $A \cup X = E$, c'est vrai en particulier pour $X = \emptyset$. Dans ce cas, $A \cup X = A \cup \emptyset = A = E$. On a donc bien ce qu'il fallait.
2. Si pour toute partie X de E on a $A \cap X = X$, c'est vrai en particulier pour $X = E$. Dans ce cas $A \cap E = E$. Mais comme $A \subset E$, $A \cap E = A$. L'égalité précédente implique donc que $A = E$.