Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales I - Parcours PEIP

CORRIGE DU DS2

Exercice 1 question 1.

• Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation homogène associée se met sous forme résolue :

$$y' = \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)}y = \frac{3x^2+1}{x^3+x}y \ .$$

La fonction $x \mapsto \frac{3x^2+1}{x^3+x}$ est la dérivée de $x \mapsto \ln(|x^3+x|) = \ln(x^3+x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{\ln(x^3+x)} = \lambda(x^3+x) = \lambda(x(x^2+1))$$

où λ est un réel quelconque.

• Cherchons une solution particulière à l'équation complète par la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire une solution particulière sous la forme : $y_0(x) = \lambda(x)x(x^2+1)$.

On a alors $y_0'(x) = \lambda'(x)(x^3+x) + \lambda(x)(3x^2+1)$,

donc $(x^2+1)\big[\lambda'(x)x(x^2+1) + \lambda(x)(3x^2+1)\big] - \frac{(3x^2+1)}{x}\big[\lambda(x)x(x^2+1)\big] - x(x^2+1) = 0$,

ce qui donne :

$$(x^2+1)\lambda'(x) - 1 = 0, \text{ cad } \lambda'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

On choisit par exemple : $\lambda(x) = \arctan(x)$ et on obtient la solution particulière :

$$x \mapsto x(x^2+1)\arctan(x)$$

ce qui permet de donner les solutions de l'équation complète :

$$x \mapsto x(x^2+1)\big[\arctan(x) + \lambda\big]$$

où λ est un réel quelconque.

• Avec la condition initiale $y(1) = 0$, on obtient $2(\arctan(1) + \lambda) = 0$, soit : $\lambda = -\frac{\pi}{4}$.

• Finalement la solution cherchée est :

$$x \mapsto x(x^2+1)\big[\arctan(x) - \frac{\pi}{4}\big] \ .$$

Exercice 1 question 2.

• L'équation homogène associée $y'' + 3y' + 2y = 0$ a comme équation caractéristique : $x^2 + 3x + 2 = 0$, dont les racines sont -1 et -2. Par conséquent les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} ,$$

où A et B sont deux réels quelconques.

• • Lorsque $f(x) = e^x$, cherchons une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda e^x$ (puisque e^x se dérive en e^x) : $\lambda(1+3+2)e^x = e^x$, ce qui donne : $\lambda = \frac{1}{6}$.

• Les solutions de l'équation complète sont donc :

$$x \mapsto \frac{1}{6}e^x + Ae^{-x} + Be^{-2x} \ , \ A, B \in \mathbb{R}$$

• Avec les conditions initiales :$y(0) = y'(0) = 0$, on obtient :

$\Big\{ A + B + \frac{1}{6} = 0$ et $-A - 2B + \frac{1}{6} = 0$. Soit $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{3}$. Donc la solution sur $\mathbb{R}$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{6}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x} ,$$

• • Lorsque $f(x) = x^2$, cherchons une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 $y_0(x) = x \mapsto ax^2 + bx + c$ (puisqu'un polynôme se dérive en un polynôme de degré un de moins) : $y_0'(x) = 2ax + b$ et $y_0''(x) = 2a$, d'où :

$$2a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 ,$$

ce qui donne le système :

$$2a = 1 \ , 6a + 2b = 0 \ , 3b + 2a + 2c = 0.$$

Donc $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{-3}{2}$ et $c = \frac{7}{4}$.

• Les solutions de l'équation complète sont donc :

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + Ae^{-x} + Be^{-2x} \ , \ A, B \in \mathbb{R}$$

• Avec les conditions initiales :$y(0) = y'(0) = 0$, on obtient :

$\Big\{ A + B + \frac{7}{4} = 0$ et $-A - 2B - \frac{3}{2} = 0$. Soit $A = -2$ et $B = \frac{1}{4}$. Donc la solution sur $\mathbb{R}$ est :

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} - 2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} ,$$

• Pour obtenir la solution avec $f(x) = e^x + x^2$ et **les mêmes conditions initiales**, il suffit d'ajouter les deux solutions obtenues précedemment :

$$\begin{aligned} x \mapsto & \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} - 2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\Big) + \Big(\frac{1}{6}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x}\Big) \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{1}{6}e^x - \frac{5}{2}e^{-x} + \frac{7}{12}e^{-2x}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

• Par définition, $f(A) = \{f(a) \ / \ a \in A\}$ est l'ensemble des images par f des éléments de A et $f^{-1}(A') = \{x \ / \ f(x) \in A'\}$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de A'.

• f n'est pas surjective car il existe au moins un élément de Y qui n'a pas d'antécédent.

• f n'est pas surjective car au moins un élément de Y a deux antécédents.

• Si $Y = f(X)$, alors f est surjective car tout élément de Y est une image par f.

• $f^{-1}(Y) = X$ est toujours réalisé quand f est une application, puisque tout élément de X a alors une image (unique) dans Y, donc tout élément de X est un antécédent par f d'un élément de Y.

• Soit $x \in X$.

$x \in f^{-1}(A' \cap B') \Longleftrightarrow f(x) \in (A' \cap B') \Longleftrightarrow f(x) \in A'$ et $f(x) \in B' \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B') \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$. D'où le résultat.

• Soit $y \in Y$.

Si $y \in f(A \cap B)$ alors $\exists x \in (A \cap B), \ y = f(x)$.

Puisque $x \in A$ et $y = f(x)$, on a $y \in f(A)$ et puisque $x \in B$ et $y = f(x)$, d'où $y \in f(B)$.

Conclusion $y \in f(A) \cap f(B)$, et donc on a bien l'inclusion demandée.

Exercice 3. La fonction ch (qui est paire) est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1, +\infty[$ et la fonction th (qui est impaire) est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1, 1[$.

• Puisque ch(1) =ch(-1) on aura th(ch(1) =th(ch(-1), cad $f(1) = f(-1)$, d'où f n'est pas injective.

• Puisque th "arrive" dans $]-1, 1[$, le réel 2 ne peut pas être une image par f. Donc f n'est pas surjective.

• On déduit de ci-dessus que $f^{-1}[2, +\infty[=\emptyset$

• et $f(\mathbb{R})$ =th(ch$(\mathbb{R})$ =th($[1, +\infty[= [$th$(1), 1[$.

Exercice 4.

•• Démontrons l'implication DIRECTE :$A \cap B = A \cap C \Longrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c$:

HYP: $A \cap B = A \cap C$ Concl: $A \cap B^c = A \cap C^c$.

• Soit $x \in A \cap B^c$. Alors $x \in A$ et $x \in B^c$, donc $x \in A$ et $x \notin B$, d'où $x \notin A \cap B$.

Or par HYP, $A \cap B = A \cap C$, donc $x \notin A \cap C$. Mais $x \in A$. C'est donc que $x \notin C$, cad $x \in A$ et $x \in C^c$. Finalement, $x \in A \cap C^c$.

D'où l'inclusion $A \cap B^c \subset A \cap C^c$.

• Pour linclusion en sens inverse, il suffit de remarquer que B et C jouent le même rôle; donc le raisonnement ci-dessus prouve aussi que $A \cap C^c \subset A \cap B^c$, d'où l'égalité.

• • Pour l'HYP : $A \cap B^c = A \cap C^c$ et la conclusion : $A \cap B = A \cap C$, il suffit de prendre pour B la partie B^c et pour C la partie C^c, d'utiliser l'implication précédente, en remarquant que $(B^c)^c = B$ et $(C^c)^c = C$!

Exercice 5.

• Il y a autant de grilles de loto que de choix de 6 numéros parmi les nombres 1,2,...,49, cad 6 parmi 49, ou C_{49}^6.

• Il y a 9 multiples de 5 parmi les nombres 1,2,...,49 : 5-10-15-20-25-30-35-40-45, donc le nombre de grilles cherché est : 6 parmi 9, ou C_9^6.

NB: pour jouer une grille de loto, il faut cocher 6 numéros sur la grille complète des numéros de 1 à 49; l'ordre n'a pas d'importance et les répétitions sont impossibles.

Exercice 6.

• On choisit une lettre parmi 3, puis on constitue un nombre à 3 chiffres en choisissant le premier chiffre parmi 1,2,3,4,5,6, le second encore parmi ces 6 chiffres et le troisième chiffre aussi, car les répétitions sont possibles; ce qui fait au total : $3 \times 6^3 = 648$.

• Même raisonnement, mais chaque chiffre est choisi parmi 2,3,4,5,6; ce qui fait : $3 \times 5^3 = 375$.

• Le nombre de codes qui contiennent au moins une fois le chiffre 1 est égal au nombre total de codes auquel on retranche le nombre de ceux qui ne contiennent aucun chiffre 1, cad 648-375=273.

• Pour choisir un code sans répétition, on choisit une lettre parmi 3, puis le premier chiffre parmi 6, puis le second chiffre parmi 5 et enfin le dernier chiffre parmi 4, ce qui donne : $3 \times 6 \times 5 \times 4 = 3 \times A_6^3 = 360$.

• Le nombre de codes avec au moins une répétiton est égal au nombre total de codes auquel on retranche le nombres de ceux sans répétition, à savoir : 648-360=288.

• Pour choisir un code contenant uniquement les chiffres 2,3 et 5, on choisit une lettre parmi 3, puis on choisit le premier chiffre parmi 2,3,5, et le second et le troisième aussi, ce qui fait : $3 \times 3^3 = 81$.