Université de Provence 2008–2009

Mathématiques Générales 1

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

Exercice 1 Soient $A(1,1,1)$, $B(2,1,0)$ et $C(2,2,1)$ trois points de l'espace.

1. Vérifiez que ces points ne sont pas alignés
2. Calculer l'aire du triangle ABC. En déduire la valeur absolue du sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.
3. Donner un vecteur de norme 1 orthogonal au plan P défini par les points A, B et C.

Exercice 2 Soit (P) le plan d'équation paramétrique :
$x = 1 + t$
$y = 2 + s$
$z = 2t - s$

1. Vérifier que l'origine $O(0,0,0)$ et le point A de coordonnées (3,5,1) appartiennent à (P).
2. Déterminer l'équation cartésienne de P et donner un vecteur normal au plan.
3. Donner une équation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire à (P).

Exercice 3 Soit P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une équation paramétrique de la droite D passant par M_0 et orthogonale au plan P.
2. Donner le point d'intersection entre D et P.
3. Montrer que la distance entre M_0 et P est donnée par $d(M_0, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
4. En déduire les coordonnées du symétrique de M_0 par rapport au plan P.

Exercice 4 Soit $(u_n)_n$ une suite convergeant vers 1. Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $u_n > \frac{1}{2}$

Exercice 5 On considère la suite définie par $u_0 \in [0,2]$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$.

1. Déterminer les limites possibles pour la suite $(u_n)_n$
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$. Conclure.

Exercice 6

1. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle convergente. Prouver que la suite $(x_{2n} - x_n)_n$ converge vers 0.
2. On considère la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$. Calculer $S_{2n} - S_n$.

3. Vérifier que pour tout $k \in [1, n]$ on a $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$. En déduire que $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$.
4. Conclure sur la convergence de la suite $(S_n)_n$.

Exercice 7 On considère la suite $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ pour $n \geq 1$.

1. Etudier la monotonie des suites extraites $(T_{2n})_n$ et $(T_{2n+1})_n$.
2. Montrer que ces deux suite sont adjacentes. Conclure pout $(T_n)_n$.