Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1

Devoir surveillé n°3

Exercice 1 *Polynômes (3 points)*

Donner la décomposition en polynômes irréductibles de X^5+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ (on ne cherchera pas à calculer les valeurs des sin et cos qui apparaissent dans le calcul).

Exercice 2 *Polynômes (7 points, les questions 5 et 6 peuvent se traiter sans les précédentes)*

Soit la famille de polynômes définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$ pour $n > 0$

1. Calculer P_2 et P_3. Montrer que si $n \geq 1$, le terme de plus haut degré de P_n est X^n .
2. Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ on a
$$P_n(x+\frac{1}{x}) = x^n + \frac{1}{x^n}$$
3. On considère le polynôme $Q(X) = X^6+3X^5+5X^4+6X^3+5X^2+3X+1$. Exprimer $Q(x)/x^3$ en fonction de $P_2(y)$ et $P_3(y)$, où $y = x + 1/x$.
4. En déduire que $Q(x)/x^3 = R(y)$ où $R(X) = X^3 + 3X^2 + 2X$.
5. Trouver les racines r_1, r_2, r_3 de R, et en déduire les racines complexes de Q en résolvant les équations $x + 1/x = r_i$, $i = 1, 2, 3$.
6. Donner la factorisation en éléments irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 3 *Groupes (6 points)*

Soit H un sous-groupe d'un groupe $(G, *)$.

1. Si x et y sont deux éléments de G, montrer que l'inverse de $x * y$ est $y^{-1} * x^{-1}$.
2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par :
$x\mathcal{R}y$ lorsque $x * y^{-1} \in H$ est une relation d'équivalence sur G.
3. Déterminer la classe du neutre de G.
4. Soit f un morphisme de groupe de $(G, *)$ dans $(G', \times)$, montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G.
5. Exprimer la proposition $x\mathcal{R}y$ de la question 2) à l'aide de f lorsque $H = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 4 *Géométrie (3 points)*

Donner les équations cartésiennes et paramétriques du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par les points $A(0, 1, 1)$, $B(-2, 0, 1)$ et $C(1, 1, 3)$.

Exercice 5 *Géométrie (4 points)*

Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y = 1$

1. Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}$
2. Déterminer l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par O et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer la distance entre $\mathcal{P}$ et l'origine O.
4. Donner l'équation cartésienne du plan passant par l'origine et contenant la droite $\mathcal{D}$ et la droite d'équation $(y = 0, x = z)$