Université de Provence 2008–2009

Mathématiques Générales I

DEVOIR SURVEILLÉ 4

Exercice 1. Soit $(G, *)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e et H un sous-groupe de G. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par:

$$x\mathcal{R}y \iff x * y^{-1} \in H.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.

   Pour un élément x de G, on note $cl(x)$ l'ensemble des éléments de G équivalents à x pour la relation $\mathcal{R}$.

2. Compléter

$$\begin{aligned} x \in cl(e) &\iff x.................. \\ &\iff x * .... \\ &\iff x.................. \end{aligned}$$

   Donc $cl(e) =$ ....

Exercice 2.

1. Soit $f : (G, *) \mapsto (G', \perp)$ un homomorphisme de groupes et H' un sous groupe de G'.
   (a) Ecrire avec le formalisme mathématique l'ensemble $f^{-1}(H)$.
   (b) Prouver que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.
2. Soit la proposition logique $P(x, x') : x \geq x' \Longrightarrow x^2 \geq x'^2$.
   (a) Ecrire la négation de $P(x, x')$, la contraposée $Q(x, x')$ et la réciproque $R(x, x')$.
   (b) A-t-on (justifier en faisant une démonstration ou en donnant un contre-exemple):
      i. $\forall\, x, x' \in \mathbb{R}\ P(x, x')$ vraie?
      ii. $\forall\, x, x' \in \mathbb{R}^+\ P(x, x')$ vraie?

Exercice 3. Soient D et D' deux droites de l'espace. Si H est un point de D et H' un point de D' qui sont tels que la droite (HH') soit orthogonale à D et orthogonale à D', on dit que (HH') est la perpendiculaire commune à D et D', et que HH' est la distance entre D et D'.

Soient les deux droites

$$D \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D' \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = -2t \end{cases}$$

1. Donner les vecteurs directeurs de D et D' puis un vecteur directeur de la perpendiculaire commune à D et D'.

2. On note $(x_H, y_H, z_H) = (1 + t_H, 1 - t_H, t_H)$ où $t_H \in \mathbb{R}$ les coordonnées d'un point $H \in D$. Donner l'équation paramétrique de la droite Δ_H passant par H et perpendiculaire à D et D'. Montrez qu'il existe un et un seul point $H \in D$ tel que Δ_H coupe D'. Calculez les coordonnées de ce point H, puis celles du point d'intersection H' de Δ_H et de D'.

3. Calculer la distance entre D et D'.

4. Donner l'équation paramétrique de la perpendiculaire commune à D et D'.

Exercice 4.

1. (a) Ecrire la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l

   (b) Ecrire la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée par 0 et 1.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \geq 1$ $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]0, 1[$.

   (b) Quelles sont les limites possibles de la suite?
   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$

   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

   (d) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

   (e) Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^4 + 3X^3 + X^2 - X + 2$ par $B(X) = X^2 + 3X + 2$.

2. On note $Q(X)$ et $R(X)$ les quotients et les restes de la division précédente. Calculer $A(-1)$, $B(-1)$, $Q(-1)$ et $R(-1)$.

3. A partir du résultat précédent, compléter l'implication suivante, dans le cas général où $A = B \times Q + R$:

$$X_0 \text{ racine de } B(X) \Longrightarrow A(X_0) = \ldots\ldots\ldots$$

4. Calculer le PGCD de A et B.

Exercice 6. Résoudre l'équation différentielle

$$xy'(x) + y = (1+x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 7. Soit l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x \qquad (E)$$

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle homogène $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$.

2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme de $(ax+b)e^x$.

3. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.