Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1

Licence PEIP

Devoir surveillé n°4

Exercice 1 *Suites*

1. Après avoir rappelé la définition de la convergence d'une suite, montrer que la limite d'une suite $(u_n)_n$ convergente est unique
2. Rappeler la définition de deux suites adjacentes

Exercice 2 *Suites*

On considère les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies, pour tout entier naturel n, par :

$u_0 = 3$ et $v_0 = 4$ et $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2$ et $v_{n+1} = (u_{n+1} + v_n)/2$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Soit la suite $(w_n)_n$ définie, pour tout entier naturel n, par : $w_n = v_n - u_n$
   (a) Montrer que la suite $(w_n)_n$ est une suite géométrique de raison 1/4 .
   (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite $(w_n)_n$.
3. Après avoir étudié le sens de variation des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = (u_n + 2v_n)/3$
   (a) Démontrer que la suite $(t_n)_n$ est constante.
   (b) En déduire la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Exercice 3 *Suites et fonctions (la question 1-d est indépendante de la précédente)*

1. Soit k un entier naturel différent de 0. Soit $(u_n)n$ la suite définie par :

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+kn}$$

   (a) Etudier sur l'intervalle $]0,1[$ les fonctions $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = x + \ln(1-x)$.
   (b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0,1[$, on a les inégalités

$$\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$$

   (c) Montrez par récurrence que, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln\left(k+1+\frac{1}{n}\right) < u_n < \ln\left(k+1+\frac{k+1}{n-1}\right).$$

(d) Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_n$.

2. Soit $(v_n)_n$ la suite définie pour tout naturel $n \geq 1$ par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(a) Montrez que, pour tout naturel $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

(b) Déduisez-en que, pour tout naturel $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n.$$

(c) Déduisez-en que $(v_n)_n$ a pour limite $+\infty$.

(d) On pose $w_n = v_n - \ln n$. Utilisez les questions précédentes pour montrer que $(w_n)_n$ est bornée et monotone. conclure.

Exercice 4 *Equations différentielles*

1. Etudiez la fonction $\ln(\cos(t))$ sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$
2. Résoudre sur le même intervalle l'équation différentielle $y' + y\tan(x) = \cos^2(x)$

Exercice 5 *Géométrie*

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes $a = x_a + iy_a$, $b = x_b + iy_b$ et $c = x_c + iy_c$.

1. Rappeler les expressions des normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de a, b et c
2. Donner la formule montrant que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AC}$ par une rotation de centre A et d'angle α.
3. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et donc du triangle ABC si

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{ou} \qquad \frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad ?$$

4. Montrez que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.