Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

Corrigé du Devoir Surveillé 4

Exercice 1. Notons $Y = X \cap [x, +\infty[$, $s = \sup X$.

Y est une partie non vide (elle contient au moins x), majorée car incluse dans X, donc possède une borne supérieure s'.

Comme s est un majorant de X et que $Y \subset X$, on en déduit que s est un majorant de Y, donc $s \geq s'$.

Comme $x \in Y$, on a alors $x \leq s'$.

Si $s' < s$, alors s' n'est plus majorant de X, donc il existe $y \in X$ tel que $s' < y$.

Comme $x \leq s'$, on a alors $x < y$, donc $y \in Y$. Ceci contredit le fait que s' soit majorant de Y.

Exercice 2.

- 1. Le polynôme $X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 5X$ a 0 et 1 comme racines évidentes.

  Il est donc divisible par $X(X-1) = X^2 - X$.

  La division eulidienne de $X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 5X$ par $X^2 - X$ nous donne

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
X^4 & -3X^3 & +7X^2 & -5X & X^2 & -X & \\
-X^4 & +X^3 & & & X^2 & -2X & +5 \\
 & -2X^3 & +7X^2 & & & & \\
 & +2X^3 & -2X^2 & & & & \\
 & & +5X^2 & -5X & & & \\
 & & -5X^2 & +5X & & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

  Donc $X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 5X = X(X-1)(X^2 - 2X + 5)$. Le discriminant du polynôme $X^2 - 2X + 5$ est $(-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. On en déduit que ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{R}$, et que la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de $X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 5X$ est

$$X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 5X = X(X-1)(X^2 - 2X + 5).$$

  Les racines du polynôme $X^2 - 2X + 5$ dans $\mathbb{C}$ sont

$$\frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i \qquad \text{et} \qquad \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = 1 - 2i.$$

  On en déduit que décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ de $X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 5X$ est

$$X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 5X = X(X-1)\left(X - 1 - 2i\right)\left(X - 1 + 2i\right).$$

- 2. Les racines complexes du polynôme $X^6 + 64$ sont les racines $6-$ième de -64. Comme $-64 = 2^6 e^{i\pi}$, les racines complexes $6-$ième de -64 sont

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i, \qquad \overline{z}_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i, \qquad z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$$

$$\overline{z}_1 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i, \qquad z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i, \qquad \overline{z}_2 = 2i.$$

La décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ du polynôme X^6+64 est donc

$$X^6+64 = \left(X-\sqrt{3}-i\right)\left(X-\sqrt{3}+i\right)\left(X+\sqrt{3}-i\right)\left(X+\sqrt{3}+i\right)(X-2i)(X+2i).$$

Pour avoir la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ du polynôme X^6+64, on regroupe les termes de degré 1 dont les racines sont conjuguées :

$$(X-2i)(X+2i) = X^2+4, \qquad \left(X-\sqrt{3}-i\right)\left(X-\sqrt{3}+i\right) = X^2-2\sqrt{3}X+4$$

$$\text{et} \qquad \left(X+\sqrt{3}-i\right)\left(X+\sqrt{3}+i\right) = X^2+2\sqrt{3}X+4.$$

donc

$$X^6+64 = (X^2+4)(X^2-2\sqrt{3}X+4)(X^2+2\sqrt{3}X+4).$$

- 3. La division euclidienne de X^6+64 par X^2+4 nous donne

$$\begin{array}{cccc|ccc}
X^6 & & & +64 & X^2 & +4 & \\
-X^6 & -4X^4 & & & X^4 & -4X^2 & +16 \\
& -4X^4 & & & & & \\
& +4X^4 & +16X^2 & & & & \\
& & +16X^2 & +64 & & & \\
& & -16X^2 & -64 & & & \\
& & & 0 & & &
\end{array}$$

On en déduit que $(X^6+64) = (X^2+4)(X^4-4X^2+16)$, donc que

$$X^4-4X^2+16 = (X^2-2\sqrt{3}X+4)(X^2+2\sqrt{3}X+4)$$

$$= \left(X-\sqrt{3}-i\right)\left(X-\sqrt{3}+i\right)\left(X+\sqrt{3}-i\right)\left(X+\sqrt{3}+i\right)$$

d'après ce qui précède. Les racines du polynôme X^4-4X^2+16 sont alors

$$\sqrt{3}+i, \qquad \sqrt{3}-i, \qquad -\sqrt{3}+i, \qquad -\sqrt{3}-i.$$

Exercice 3.

- 1. la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A.$$

- 2. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (v_n) tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $v_n \geq A$.

  Donc pour tout $n \geq N$, nous avons $u_n \geq v_n \geq A$.

  On a donc prouvé que, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq A$, ce qui prouve bien que (u_n) tend vers $+\infty$.

- 3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = (n+1)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (n+1)\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq \frac{n+1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{n+1}.$$

La suite $(\frac{1}{2}\sqrt{n+1})_n$ tend vers $+\infty$ car si $A \in \mathbb{R}$ et si $N \geq 4A^2$, nous avons, pour $n \geq N$,

$$\frac{1}{2}\sqrt{n+1} \geq \frac{1}{2}\sqrt{4A^2} = |A| \geq A.$$

On déduit de la question précédente que (w_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4.

- 1. $u_1 = 1 + 2/3 = 5/3$. $u_2 = 1 + 3/5 = 8/5$. $u_3 = 1 + 5/8 = 13/8$. $u_4 = 1 + 8/13 = 21/13$. $u_5 = 1 + 13/21 = 34/21$.

- 2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: "$3/2 \leq u_n \leq 2$". Comme $3/2 \leq u_0 \leq 2$, la proposition $P(0)$ est vraie.

Supposons que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Il découle du fait que $3/2 \leq u_n \leq 2$, que

$$u_{n+1} = 1 + 1/u_n \geq 1 + 1/2 = 3/2$$

et que

$$u_{n+1} = 1 + 1/u_n \leq 1 + 2/3 = 5/3 < 2,$$

donc $3/2 \leq u_{n+1} \leq 2$, et $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons donc prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{3}{2} \leq u_n \leq 2.$$

- 3. Si (u_n) converge vers ℓ, la suite (u_{n+1}) converge elle aussi vers ℓ. Il découle du résultat de la question précédente que $\ell \in [\frac{1}{2}, 2]$, ce qui implique aussi que $1 + 1/u_n$ tend vers $1 + 1/\ell$. In fine, nous obtenons que ℓ vérifie l'équation $\ell = 1 + 1/\ell$.

En particulier, si on multiplie à gauche et à droite l'égalité précédente par $\ell \neq 0$, nous obtenons $\ell^2 = \ell + 1$, soit encore $\ell^2 - \ell - 1 = 0$.

La résolution de cette équation donne

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\ell \in [\frac{3}{2}, 2]$ et que $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, nous en déduisons que

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons
$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = 1 + \frac{1}{u_n} - \ell.$$
Or $\ell = 1 + \frac{1}{\ell}$, donc
$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} - \left(1 + \frac{1}{\ell}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - u_n}{u_n \ell} = -\frac{v_n}{\ell u_n}.$$

- 5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $Q(n)$:
$$|v_n| \leq \left(\frac{2}{3\ell}\right)^n |v_0|.$$
La proposition $Q(0)$ est vraie car $|v_0| \leq \left(\frac{2}{3\ell}\right)^0 |v_0|$.

  Supposons que la proposition $Q(n)$ soit vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $Q(n+1)$ est vraie.

  Comme
$$v_{n+1} = -\frac{1}{\ell u_n} v_n,$$
nous obtenons donc
$$\begin{aligned} |v_{n+1}| &= \frac{1}{\ell |u_n|} |v_n| \leq \frac{2}{3\ell} |v_n| \qquad \text{(car } u_n \geq 3/2\text{)} \\ &\leq \frac{2}{3\ell} \left(\frac{2}{3\ell}\right)^n |v_0| \qquad \text{(grâce à l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{2}{3\ell}\right)^{n+1} |v_0|, \end{aligned}$$
et $Q(n+1)$ est vraie.

  Nous avons donc prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |v_n| \leq \left(\frac{2}{3\ell}\right)^n |v_0|.$$

- 6. Comme $0 < \frac{2}{3\ell} < 1$, nous en déduisons que (v_n) converge vers 0.

  En en déduit que $(u_n)_n = (\ell + v_n)_n$ converge vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 5.

- 1. Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre, et tel que tout élément possède un symétrique.

- 2. (a). Supposons $a * b = a * c$. a possède un symétrique a^{-1}. On a alors $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$. L'associativité de la loi de composition interne nous donne $(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$, donc $e * b = e * c$ où e est l'élément neutre du groupe, donc $b = c$.

  (b) Il découle de la question précédente que φ est injective. Vérifions que f est surjective. Soit $y \in G$. Si on pose $x = a^{-1} * y$, nous avons $\varphi(x) = a * x = a * (a^{-1} * y) = (a * a^{-1}) * y = e * y = y$, ce qui prouve bien que f est surjective.

Il en résulte que φ est bijective.

φ est un morphisme de groupe si et seulement si, pour tous x, y dans G, $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.

Si $a = e$, il est clair que φ est un morphisme de groupe, car φ est l'identité.

Si par contre $a \neq e$, faisant $x = a^{-1}$ et $y = e$, nous avons d'une part

$$\varphi(x * y) = \varphi(a^{-1} * e) = \varphi(a^{-1}) = a * a^{-1} = e$$

et d'autre part

$$\varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(a^{-1}) * \varphi(e) = (a * a^{-1}) * (a * e) = e * a = a,$$

donc $\varphi(x * y) \neq \varphi(x) * \varphi(y)$, ce qui prouve que φ n'est pas un morphisme de groupe.

- 3. (a) La table de multiplication est la suivante :

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

(b) on voit que $\overline{1}$ est l'élément neutre.

(c) $\overline{1}$ est inversible et son inverse est $\overline{1}$.

$\overline{5}$ aussi et son inverse est $\overline{5}$.

$\overline{2}$ n'est pas inversible car on lit sur la table de multiplication que le produit de $\overline{2}$ avec un autre élément ne donne jamais $\overline{1}$.

Il en est de même pour $\overline{3}$ et $\overline{4}$. Donc les seuls éléments inversibles sont $\overline{1}$ et $\overline{5}$.

(d) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ n'est pas un groupe car le produit de $\overline{2}$ et $\overline{3}$ qui vaut $\overline{0}$ n'est pas dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, donc la multiplication n'est pas une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(e) Par contre, l'ensemble $\{\overline{1}, \overline{5}\}$ muni de la multiplication est un groupe : il est stable pour la multiplication, a $\overline{1}$ comme élément neutre et ses éléments sont inversibles.