Université de Provence 2008–2009

Mathématiques Générales I

DEVOIR SURVEILLÉ 5

Exercice 1.

1. Soit A un ensemble muni de deux opérations internes $+$ et $\times$ et $B \subset A$. A quelles conditions A est-il un anneau? B un sous anneau de A?

2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles est un anneau commutatif. Quel est le neutre de la multiplication? Quels sont les éléments inversibles?

3. Rappelez la définition à l'aide du formalisme mathématique de $\lim u_n = 0$, ainsi que de "u_n ne converge pas vers 0"

4. Démontrez que la somme de deux suites convergeant vers 0 est aussi une suite convergeant vers 0.

5. Montrer que l'ensembles des suites réelles convergeant vers 0 est un sous anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

6. Pour quelles valeurs de l l'ensemble des suites convergeant vers l est-il un sous anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

7. Dans l'ensemble des suites réelles convergentes, on considère la relation binaire $u_n \mathcal{R} v_n$ si $\lim u_n \leq \lim v_n$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre (justifier)?

Exercice 2. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 20}.$$

a. Montrez que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 20$.

b. Montrez que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

c. Montrez que la suite $(u_n)_n$ converge et calculez sa limite.

Exercice 3. On cherche les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation (E) $f'(x) = f(-x)$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$ est solution de (E)
2. Trouver une équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants satisfaite par les solutions de (E)
3. Résoudre cette équation en donnant les solutions sous forme réelle.
4. En déduire les solutions de (E)

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'(x)ch(x) + y(x)sh(x) = \frac{1}{1+x^2}$