

**Mathématiques Générales 1****Licence PEIP**

## DEVOIR SURVEILLÉ N°5

**Exercice 1** *Groupes* (2 pts)

1. Montrer que l'intersection de deux sous groupes d'un groupe  $(G, *)$  est un sous groupe de  $G$ .
2. L'union de deux sous groupes est-elle un sous groupe ? (on pensera à vérifier avec  $2\mathbb{Z}$  et  $3\mathbb{Z}$ )

**Exercice 2** *Complexes* (1 pt)

Soient  $a, b, c, d$  quatre nombres réels. En considérant les nombres complexes  $z = a + ib$  et  $z' = c + id$ , montrez qu'il existe deux nombres réels  $A$  et  $B$  tels que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = A^2 + B^2.$$

**Exercice 3** *Polynômes* (3pts)

Soit le polynôme  $P = X^6 + 5X^4 + 4X^2$ . Quelle est la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  ? dans  $\mathbb{R}[X]$  ?

**Exercice 4** *Dénombrement* (3 pts)

Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 5 cartes peut-on obtenir contenant :

1. exactement 3 as ?
2. au moins 2 as ?
3. l'as de cœur et au moins deux autres as ?

**Exercice 5** *Fonctions trigonométriques et hyperboliques* (4 pts)

1. Rappeler les domaines de définition et les dérivées des fonctions arccos et arctan
2. Montrer que pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
3. Exprimer  $\operatorname{th}(a + b)$  en fonction de  $\operatorname{th}(a)$  et  $\operatorname{th}(b)$ . Calculer  $\operatorname{th}(4x)$  en fonction de  $\operatorname{th}(x)$

**Exercice 6** *Equations différentielles* (4 pts)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où  $d$  est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à  $(E.D.)$ .
2. Trouver une solution particulière de  $(E.D.)$  lorsque  $d(x) = e^{-2x}$  (sous la forme  $ae^{-2x}$ ) et lorsque  $d(x) = e^{2x}$  (sous la forme  $(ax^2 + bx + c)e^{2x}$ ) respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de  $(E.D)$  lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

**Exercice 7 Suites** (6 pts)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . On définit les deux suites  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

1. Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ .
2. Montrez que les suites  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  ont même limite. Que peut-on en déduire ?  
On se propose de calculer la limite commune des suites  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$ .
3. Montrez qu'il existe un unique  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $a = b \cos \alpha$ .
4. Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b \sin \alpha \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}, \quad b_n = \frac{b \sin \alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

En déduire la limite commune des deux suites (On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ).