Université d'Aix-Marseille 2011–2012

Mathématiques Générales 1

Devoir surveillé n° 5

On rendra deux copies séparées :

- Copie 1 : Exercices 1, 2 et 3 **- Copie 2 : Exercices 4, 5 et 6.**

Exercice 1 Questions de cours (1,5 points)

1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E, et f une application de E vers un autre ensemble F. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. Montrer que $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 - \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 \cos(2a)$, si a est l'angle formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
3. Donner un exemple de suite non bornŐe qui ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$

Exercice 2 Equations différentielles (2 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$(x^2+1)^2y' + 2x(x^2+1)y = 1$$

Exercice 3 Combinatoire (2,5 points)

On appelle main 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y-a-t-il de mains d'une seule couleur ? (il y a 4 couleurs : trèfle, carreau, coeur, pique)
3. Combien y-a-t-il de mains avec exactement un As ?
4. Combien y-a-t-il de mains avec au moins deux As ?

Exercice 4 Fractions rationnelles (3 points)

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples :

$$\frac{X^5 - 2X^4 + 4X^2 - 5X + 1}{X^3 - 2X^2 + X}$$

Exercice 5 Suites (4 points)

1. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers $l \in \mathbb{R}$. Compléter la démonstration suivante :

   Soit $\epsilon > 0$.

   La suite $(u_{2n})_n$ converge vers l donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ ....

   La suite $(u_{2n+1})_n$ converge vers l donc $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ ....

   On pose $M = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $m > M$.

   Si m est pair, alors $m = 2k$ alors $k >$ ... et donc u_m ... ...

   Si m est impair, alors m=$2k + 1$ alors $k >$ ... et donc u_m ... ...

   On en déduit que la suite $(u_n)_n$ converge vers l.
2. Soit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{n}$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_{2n}$ et $x_n = v_{2n+1}$. Montrer que les suites $(w_n)_n$ et $(x_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ? Qu'en conclut-on sur la suite $(v_n)_n$?

Exercice 6 Polynômes. (6 points)

On définit le polynôme $P_n(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n$.

1. Quel est le degré de P_n ?
2. Quel est le coefficient de plus haut degré de P_n ?
3. Quel est le terme constant de P_n ? En déduire une racine évidente quand n est pair.
4. Montrer que si un complexe a est une racine de P_n, on a $a \neq 1$ et $\frac{a+1}{a-1}$ racine n-ième de l'unité.
5. En déduire les racines de P_n, les exprimer à l'aide de la fonction tangente.
6. Donnez la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire le produit des racines de P_n en fonction du terme constant et du coefficient de plus haut degré de P_n.
7. On prend maintenant $n = 2p + 1, p \in \mathbb{N}^*$. En comparant les racines correspondant à k et $n - k$ pour $k \in \{1, 2, ..., p\}$, donner la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$ et en déduire que
$$\prod_{k=1}^{p} \tan(\frac{k\pi}{2p+1}) = \sqrt{2p+1}$$

Exercice 7 Géométrie euclidienne. (6 points)

Tout dessin sera fait avec les valeurs de la question 1.

Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C et D distincts deux à deux. On note I le milieu de $[BD]$, J le milieu de $[AC]$ et O l'isobarycentre de (A, B, C, D). On construit les triangles rectangles isocèles ABM, BCN, CDP et DAQ tels que les angles orientés $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$, $(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB})$, $(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC})$ et $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD})$ admettent pour mesure$\frac{\pi}{2}$. On note K le mileu de $[MP]$ et L le milieu de $[NQ]$.

On se propose d'étudier la configuration (I, J, K, L). A cet effet, on prendra un repère orthonormal direct d'origine O et on introduit les affixes a, b, c, d de A, B, C, D, les affixes m, n, p, q de M, N, P, Q et les affixes f, g, k, ℓ de I, J, K et L.

1. Effectuer une figure soignée en prenant $a = -2 + 2i$, $b = -2 - i$, $c = -2i$ et $d = 4 + i$.
2. Déterminer l'affixe du milieu de $[IJ]$.
3. Prouver que $m(1 - i) = a - ib$. Calculer de manière analogue n, p et q.
4. Déterminer l'isobarycentre de (M, N, P, Q). En déduire le milieu de $[KL]$.
5. Soit r la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que $r(J) = K$.
6. Montrez que (I, J, K, L) est un carré de centre 0.