Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales 1

Correction du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 Equations différentielles (3 points)

1. On résout d'abord l'équation homogène $(1+x^2)y' + xy = 0$. Comme le facteur $1+x^2$ devant y' ne s'annule jamais, l'équation est équivalente à
$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0\,.$$
Une primitive de $\frac{x}{1+x^2}$ est $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, et donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme
$$Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}\,,\quad \text{avec } C \in \mathbb{R}\,.$$
Pour traiter le second membre, on peut utiliser la variation de la constante et chercher une solution de la forme $\frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}}$, mais cela demande une bonne maîtrise des intégrations par parties. Car l'on obtient pour $C(x)$ l'équation $C'(x) = \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ et par IPP (et à une constante près)
$$\begin{aligned} C(x) &= \int 3x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = 3x^2\sqrt{1+x^2} - \int 6x\sqrt{1+x^2}\,dx \\ &= 3x^2\sqrt{1+x^2} - 3\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = (3x^2-2x^2-2)\sqrt{1+x^2} = (x^2-2)\sqrt{1+x^2}\,, \end{aligned}$$
ce qui nous donne une solution particulière x^2-2.

   Une possibilité plus simple est de chercher une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2. En effet, dans ce cas $xy(x)$ et $(1+x^2)y'(x)$ sont deux polynômes de degré 3, et la somme sera un polynôme de degré au plus 3. En choisissant bien les coefficients, il y a un espoir d'obtenir une somme égale à $3x^3$. On pose donc $y(x) = ax^2+bx+c$ et on le rentre dans l'équation. On obtient :
$$3x^3 = (1+x^2)(2ax+b) + x(ax^2+bx+c) = 3ax^3 + 2bx^2 + (c+2a)x + b$$
ce qui donne par identification $a=1$, $b=0$ et $c=-2$. On trouve donc également la solution x^2-2.

   Les solutions de l'équation avec second membre sont donc de la forme
$$x^2 - 2 + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}\,,\quad C \in \mathbb{R}$$
La solution vaut 0 en 0 pour $C = 2$. La solution recherchée est donc
$$y(x) = x^2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Le polynôme associé à l'équation homogène est X^2+X+1 donc les racines sont $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme
$$e^{-\frac{x}{2}}\left(\alpha\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\,,\quad \text{avec } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,.$$
Pour trouver une solution particulière, on la cherche de la forme $y(x) = A\cos x + B\sin x$. En rentrant cette forme dans l'équation, on obtient
$$\cos x = (A+B-A)\cos x + (B-A+B)\sin x = B\cos x - A\sin x\,,$$

et en identifiant on trouve $A = 0$ et $B = 1$. Une solution particulière est donc $y_p(x) = \sin x$. Et les solutions de l'équation avec second membre sont donc de la forme

$$\sin x + e^{-\frac{x}{2}} \left(\alpha \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\ , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

On remarque que la solution ci-dessus satisfait $y(0) = \alpha$. Donc la solution qui vérifie les conditions initiales données est obtenue avec $\alpha = 0$. En dérviant ce qui reste, on obtient

$$y'(x) = \cos x + \beta e^{-\frac{x}{2}} \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \tfrac{1}{2} \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

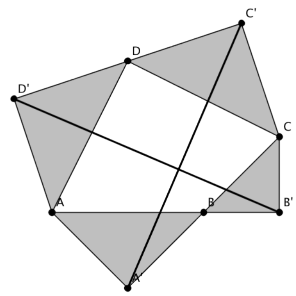
et donc $y'(0) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. La dérivée en 0 s'annule à condition que $\beta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. La solution recherchée est donc

$$y(x) = \sin x - \tfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Exercice 2 Suites (3 points)

1. Notons P_n la proposition : $0 \leq u_n \leq v_n$.
   Remarquons que P_0 est vraie car par hypothèse $0 \leq u_0 = a \leq v_0 = b$.
   Supposons que P_n est vraie. Un calcul simple donne $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{2}$, ce qui implique que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$. Ensuite $u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \geq 0$ car u_n et v_n sont positifs d'après l'hypothèse. Et donc P_{n+1} est vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que la propriété P_n est vraie pour tout n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{4} \geq 0$ car $u_n \leq v_n$ (voir question précédente). La suite (u_n) est donc croissante.
   De même pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -\frac{v_n - u_n}{4} \leq 0$ et donc la suite (v_n) est croissante.
   Remarquez qu'il n'y a pas besoin de récurrence ici.
3. On a déjà calculé que $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{2}$. Donc $(v_n - u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme $b - a$. On sait (ou on montre par récurrence) que
   $$v_n - u_n = \frac{b - a}{2^n}$$
4. De l'expression de $v_n - u_n$ on déduit que $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$, car la raison de la suite géométrique appartient à $]-1, 1[$. La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) décroissante et la différence entre les deux tends vers 0. Ce sont donc 2 suites adjacentes. Et elles convergent donc vers la même limite notée l.
5. Un calcul simple donne $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$. Par récurrence, on voit donc que la suite est constante et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = u_0 + v_0 = a + b$. D'autre part, comme les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers l, on en déduit que la suite constante $(u_n + v_n)$ converge vers $2l$. Donc nécessairement $l = \frac{a+b}{2}$.

Exercice 3 Géométrie (3,5 points)

1. Comme $(\widehat{\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'A}}) = +\pi/2$, on peut écrire $\arg\left(\frac{a-a'}{b-a'}\right) = \frac{\pi}{2}$.
   Et comme $A'B = A'A$, on a $\left|\frac{a-a'}{b-a'}\right| = 1$. Cela implique $\frac{a-a'}{b-a'} = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
   Ce qui donne $a - a' = ib - ia'$ et ensuite $a - ib = a'(1-i)$. Mais comme $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1+i}{2}$, on obtient finalement $a' = (a - ib)\frac{1+i}{2}$.
2. 

3. Pour obtenir b', inutile de refaire les calculs, il faut simplement remplacer a par b et b par c dans l'équation donnant a'. On obtient donc $b' = (b - ic)\frac{1+i}{2}$.
   On fait la même chose pour c' et d', ce qui donne $c' = (c - id)\frac{1+i}{2}$ et $d' = (d - ia)\frac{1+i}{2}$.
4. On obtient $a' - c' = (a - ib - c + id)\frac{1+i}{2} = [a - c - i(b-d)]\ \frac{1+i}{2}$
   et $b' - d' = [b - d + i(a-c)]\ \frac{1+i}{2}$.
   On peut remarquer que $b - d + i(a-c) = i\,[a - c - i(b-d)]$, et que donc $b' - d' = i(a' - c')$.
   En prenant le module, on obtient $|b' - d'| = |a' - c'|$, c'est-à-dire que $A'C' = B'D'$. En prenant l'argument dans $\frac{b'-d'}{a'-c'} = i$, on obtient $(\widehat{\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{D'B'}}) = +\pi/2$, ce qui implique que les droites $(A'C')$ et $(B'D')$ sont orthogonales. Cela se voit bien sur le dessin.

Exercice 4 Géométrie (4,5 points)

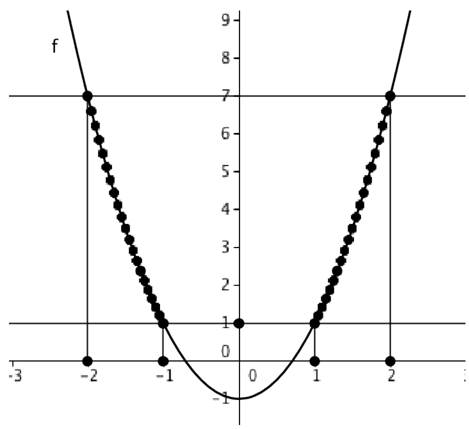
1. Le vecteur normal à P est donné par les coefficients devant x, y, z dans l'équation du plan donc $\overrightarrow{n} = (1, 2, 1)$.
   Le vecteur directeur de D est donné par les coefficients devant t dans l'équation paramètrique de la droite donc $\overrightarrow{u} = (2, 1, -4)$.
   Le produit scalaire vaut $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 1 \times 2 + 2 \times 1 - 1 \times 4 = 0$.
   Les deux vecteurs sont donc orthogonaux, ce qui veut dire que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est contenu dans le plan P, puisque perpendiculaire à un vecteur normal de ce plan. Cela veut dire que la droite D est parallèle au plan P.
2. Cherchons un point appartenant à D et à P. Il doit être de la forme donnée par l'équation paramètrique de D, pour un certain $t \in \mathbb{R}$, et satisfaire l'équation de P. On cherche donc un $t \in \mathbb{R}$ tel que
   $$(1 + 2t) + 2t + (1 - 4t) - 4 = 0\,.$$
   Ceci est impossible car le membre de gauche vaut toujours -2. L'intersection est donc vide : $P \cap D = \emptyset$. Ce qui veut dire que la droite est parallèle au plan (sinon il n'y aurait qu'un seul point d'intersection).
3. Cela revient à chercher un t pour lequel la forme paramètrique de D donne le point A. En regardant la première composante, on remarque qu'il faut que $1 + 2t = -1$ et donc $t = -1$. Et avec cette valeur, on obtient bien le point de coordonnées $(1 - 2, -1, 1 + 4) = (-1, -1, 5)$, c-à-d A.
4. $$\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-4) - 1 \times 1 \\ 1 \times 2 - 1 \times (-4) \\ 1 \times 1 - 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\,.$$

Soit $\overrightarrow{n'}$ un vecteur orthogonal au plan P', le plan perpendiculaire à P et contenant D. Ce vecteur doit-être orthogonal à $\overrightarrow{n}$, car le plan P' est perpendiculaire à P, et aussi perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$, puisque P' contient la droite D. Donc le vecteur $\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}$ convient.
Si M est un point de coordonnées (x, y, z), $M \in P'$ ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$. Ce qui donne $-9(x+1)+6(y+1)-3(z-5) = 0$ ou encore en divisant tout par 3

$$-3x + 2y - z + 4 = 0\,.$$

On peut remarquer que le point A appartient bien à ce plan.

Exercice 5 Applications et fonctions usuelles (5 points)

1. 

La fonction n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$.
La fonction n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 1 \geq -1$ et donc -2 n'a pas d'antécédent par f.
Il y a beaucoup de couples (intervalle de départ, intervalle d'arrivée) qui rendent f bijective. Par exemple :

$$f : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[, \quad f :]-\infty, -1[\to]1, +\infty[\,, \quad f : \{2\} \to \{7\}$$

(Et oui, les singletons sont aussi des intervalles) et pleins d'autres encore.

2. Grâce au graphique, on voit que $f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [1, 7]$,
$f\left(\left[-\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [f(0), f(1)] = [-1, 1]$,
$f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$,
$f^{-1}([1, 7]) = [-2, 1] \cup [1, 2]$

3. La fonction g est bien définie ssi $2x^2 - 1 = f(x) \in [-1, 1]$, ce qui équivaut d'après la question précédente à $x \in f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$. Le domaine de définition de g est donc l'intervalle $[-1, 1]$. La fonction g est continue sur cet intervalle comme composée de deux fonctions continues.
La fonction arccos étant dérivable sur $]-1, 1[$ uniquement, la fonction g sera dérivable uniquement sur $f^{-1}(]-1, 1[) =]-1, 0[\cup]0, 1[$. Sur cet ensemble, sa dérivée sera

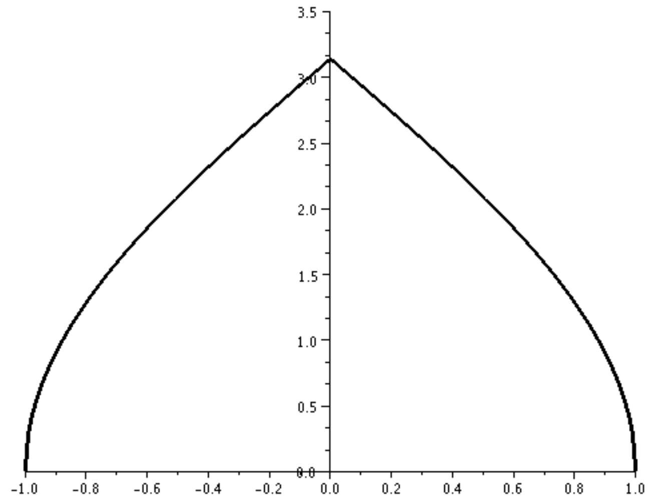
$$g'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}} = -\frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}} = -\frac{2x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

Sur l'intervalle $]-1, 0[$, on aura donc $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, et la fonction g sera croissante. De plus sa dérivée vaut moins deux fois celle de arccos donc on aura $g(x) = -2\arccos(x) + C^{ste}$ (et cela reste vrai aux bords de l'intervalle, donc en -1 et en 0). Comme $g(0) = \arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que la constante vaut 2π.

Sur l'intervalle $]0, 1[$, on aura donc $g'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, et la fonction g sera décroissante. De plus sa dérivée vaut deux fois celle de arccos donc on aura $g(x) = 2\arccos(x) + C^{ste}$. Comme $g(0) = \arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que la constante vaut 0. On peut conclure que

$$g(x) = \begin{cases} 2\arccos x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2\pi - 2\arccos x & \text{si } x \in [-1,0] \end{cases},$$

ce qui donne le graphique ci-dessous



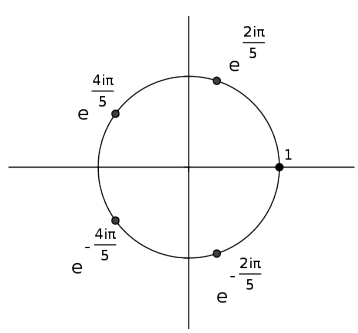
Exercice 6 Polynômes (6 points)

1. Les racines de $X^5 - 1$ sont les racines cinquièmes de l'unité. C'est-à-dire $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ avec la notation $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Cela donne la décomposition sur $\mathbb{C}$ ci-dessous

   $$X^5 - 1 = (X-1)(X-\omega)(X-\omega^2)(X-\omega^3)(X-\omega^4) = (X-1)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right)$$

   Pour la décomposition sur $\mathbb{R}$, on regroupe deux à deux les termes contenant les racines conjuguées. On obtient

   $$X^5 - 1 = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)$$



2. $\mathbb{U}_5$ est le groupe des racines cinquièmes de l'unité. C'est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   En effet, il est stable par multiplication, car si z et z' sont deux racines cinquièmes de l'unité, alors $(zz')^5 = z^5 z'^5 = 1 \times 1 = 1$ et donc zz' est encore une racine cinquième de l'unité.
   Et il est aussi stable par passage à l'inverse car si z est une racine cinquième de l'unité. $\left(\frac{1}{z}\right)^5 = \frac{1}{z^5} = \frac{1}{1} = 1$ et donc $\frac{1}{z}$ est encore une racine cinquième de l'unité.

Une autre façon de voir la stabilité par produit et passage à l'inverse de $\mathbb{U}_5$ est la suivante. On sait que les racines cinquièmes de l'unité s'écrivent de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En faisant un produit, $e^{\frac{2ik\pi}{5}} e^{\frac{2ik'\pi}{5}} = e^{\frac{2i(k+k')\pi}{5}}$ a toujours la forme d'une racine cinquième de l'unité et c'est la même chose pour le passage à l'inverse : $\left(e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)^{-1} = e^{\frac{2i(-k)\pi}{5}}$ est encore une racine cinquième de l'unité.

La table de multiplication est écrite ci-dessous. Remarquez qu'il faut bien simplifier les produits pour obtenir toujours une puissance comprise entre 0 et 4. Par exemple, $\omega^3 \times \omega^4 = \omega^7 = \omega^2$ car $\omega^5 = 1$.

$\times$	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4
1	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4
ω	ω	ω^2	ω^3	ω^4	1
ω^2	ω^2	ω^3	ω^4	1	ω
ω^3	ω^3	ω^4	1	ω	ω^2
ω^4	ω^4	1	ω	ω^2	ω^3

Une table de multiplication bien écrite (avec les simplifications) permet de voir que $\mathbb{U}_5$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ car on y voit la stabilité par produit (le tableau ne contient que des $1, \omega, \dots, \omega^4$) et par passage à l'inverse (il y a toujours un 1 sur chaque ligne ou colonne).

3. $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = \frac{1-1}{\omega-1} = 0$
4. (a) $\alpha + \beta = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$.
   $\alpha\beta = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1$, où l'on a utilisé que $\omega^5 = 1$ ou la table de multiplication.
   α et β sont les racines de $X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta$, c-à-d de
   $$X^2 + X - 1$$
   (b) $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, donc c'est un réel. Comme $0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$, il est positif.
   $\beta = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, donc c'est un réel. Comme $\frac{\pi}{2} \leq \frac{4\pi}{5} \leq \pi$, il est négatif.
   (c) Les racines de $X^2 + X - 1$ sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. α est la positive et β la négative. On obtient donc
   $$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \qquad \beta = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
5. Ce qui donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La factorisation de $X^5 - 1$ sur $\mathbb{R}$ est donc
   $$(X-1)\left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1\right)$$
   En développant, on obtient bien
   $$\begin{aligned}
   &\left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1\right) \\
   &\quad = X^4 + \frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2}X^3 + \left(2 + \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4}\right)X^2 + \frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2}X + 1 \\
   &\quad = X^4 + X^3 + \left(2 + \frac{1-5}{4}\right)X^2 + X + 1 \\
   &\quad = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1
   \end{aligned}$$
   Et ensuite on reconnaît le classique $X^5 - 1 = (X-1)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)$.