Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

NOMBRES COMPLEXES

1 Rappels

1.1 Ecriture.

Tout nombre complexe s'écrit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

On note $x = \mathrm{Re}\, z$ et $y = \mathrm{Im}\, z$. En particulier $\mathrm{Re}\, i = 0$ et $\mathrm{Im}\, i = 1$.

Deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

On dit que le point M du plan ayant pour coordonnées (x, y) a pour affixe $z = x + iy$.

De même, tout vecteur $\vec{u}$ ayant pour coordonnées (x, y) dans la base orthonormée $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan a pour affixe $z = x + iy$. Ainsi, $\vec{i}$ a pour affixe 1 et $\vec{j}$ a pour affixe i.

Les réels sont des complexes particuliers $x + i0$. Ils sont représentés par les points de l'axe des abscisses.

Un complexe z est un réel si et seulement si $\mathrm{Im}\, z = 0$.

Les complexes représentés par des points de l'axe des ordonnées sont appelés des imaginaires purs.

Un complexe z est un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}\, z = 0$.

1.2 On opère dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$.

On impose au produit du complexe i par lui-même d'être égal à -1, c'est-à-dire que

$$\boxed{i \times i = i^2 = -1}$$

et ensuite on opère dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$ en remplaçant lorsque le cas se présente i^2 par -1.

Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on pose

$$z + z' = (x + x') + i(y + y').$$

Notez que

$$\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, z' \qquad \mathrm{Im}\,(z + z') = \mathrm{Im}\, z + \mathrm{Im}\, z'.$$

On pose aussi, compte tenu des conventions précédentes

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + i^2yy' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

En particulier, si $z' = x'$ est réel, nous avons

$$zz' = xx' + iyx'.$$

Remarquons que si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs ayant pour affixes z et z', alors le vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ a pour affixe $z + z'$.

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont :

- *commutatives* : pour tous complexes z et z',

$$z + z' = z' + z \qquad zz' = z'z$$

- *associatives* : pour tous complexes z, z' et z'',

$$z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \qquad z(z'z'') = (zz')z''$$

- *admettent un élément neutre* : pour tout complexe z,

$$z + 0 = z \qquad z \times 1 = z.$$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tous complexes z, z' et z'',

$$z(z' + z'') = zz' + zz''.$$

On vérifie aussi que pour tout complexe z, $0 \times z = 0$.

1.3 Opposé et soustraction.

Si $z = x + iy$, le complexe $z' = -x - iy$ vérifie $z + z' = 0$. On note $-z$ ce complexe.

Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe $-z$, alors M' est le symétrique de M par rapport à l'origine.

Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont deux complexes, on définit

$$z - z' = (x - x') + i(y - y').$$

Si M a pour affixe z et M' pour affixe z', alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$. Autrement dit :

$$\text{Affixe}(\overrightarrow{MM'}) = \text{Affixe}(M') - \text{Affixe}(M)$$

1.4 Conjugué, module, quotient et inverse.

Si $z = x + iy$ est un complexe, on appelle conjugué de z le complexe noté $\bar{z}$ défini par

$$\bar{z} = x - iy.$$

Géométriquement, si M a pour affixe z et M' pour affixe $\bar{z}$, alors M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des x.

On a alors

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

qui est un réel positif ou nul.

On note $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et on appelle ce nombre le module de z.

Géométriquement, $|z|$ est la longueur OM si M a pour affixe z.

Pour tout complexe z, on a $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

Si $z = x + iy \neq 0$, nous avons

$$z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1.$$

Ceci montre que le complexe z a un inverse qui est $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ que l'on note $\dfrac{1}{z}$.

Enfin si z et z' sont deux complexes tels que $z' \neq 0$, on note

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}.$$

Pour tout complexe z, on a $z = 0$ si et seulement si $\bar{z} = 0$.

Un complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$. Un complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

Pour tout complexe z, le conjugué de $\bar{z}$ est z. En d'autres termes

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Enfin, pour tous complexes z et z',

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}', \qquad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad \text{avec } z' \neq 0.$$

En ce qui concernce le module, pour tout $z \neq 0$, nous avons $|z| > 0$ et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Pour tous complexes z et z', $|zz'| = |z||z'|$.

Enfin, pour tout complexe $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

1.5 Argument et formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul.

Soit z un complexe non nul. Si dans le plan complexe, M a pour affixe z, on appelle *un argument* de z une mesure θ en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OM}})$.

Une forme *trigonométrique* de z est une écriture du type

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Si $z = x + iy$, nous avons

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Il en résulte que deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments qui diffèrent d'un multiple de 2π.

z est réel si et seulement si $z = 0$ ou $\arg z = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

z est imaginaire pur si et seulement si $z = 0$ ou $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$z' = \bar{z}$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg z' = -\arg z + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$z' = -z$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg z' = \pi + \arg z + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si M a pour affixe z et M' pour affixe z', alors $\arg(z'-z)$ est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{MM'}})$.

1.6 Formes exponentielles ou polaires d'un nombre complexe non nul.

On note, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Pour tous réels θ et θ',

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

$$e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad e^{i0} = e^{2i\pi} = 1.$$

Pour tout réel θ

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}, \qquad e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}.$$

Enfin $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta = \theta' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous avons les formules d'Euler (1748) :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Une forme exponentielle ou polaire d'un nombre complexe z non nul est une écriture

$$z = |z|e^{i\theta}$$

où θ est un argument de z.

Le produit zz' de deux complexes non nuls z et z a pour module le produit des modules de z et z' et a un argument qui est la somme d'un argument de z et d'un argument de z'.

$$(|z|e^{i\theta})(|z'|e^{i\theta'}) = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}.$$

Enfin, nous avons la formule de Moivre : pour tout entier relatif n et tout réel θ :

$$(\cos + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

soit en d'autres termes : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Le quotient $\frac{z'}{z}$ de deux complexes non nuls z et z a pour module le quotient des modules de z et z' et a un argument qui est la différence d'un argument de z et d'un argument de z'.

$$\frac{|z|e^{i\theta}}{|z'|e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|}e^{i(\theta-\theta')}.$$

Enfin l'interprétation géométrique de ce qui précède réside en la proposition suivante :

Si A, B et C sont trois points distincts du plan ayant pour affixes respectives a, b et c, si k est un réel strictement positif et θ un nombre réel, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $$\frac{CB}{CA} = k \qquad \text{et} \qquad (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \theta \quad [2\pi]$$

(2) $$\frac{b-c}{a-c} = ke^{i\theta}$$

2 Racines $n-$ièmes de nombres complexes.

2.1 Racines carrées de nombres complexes.

Soit $a + ib \neq 0$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche les $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = a + ib$. On appelle ces nombres les racines carrées de $a + ib$.

Pour trouver ces z, on écrit que $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib$, ce qui nous donne

$$x^2 - y^2 = a^2, \qquad 2xy = b.$$

Or $x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. En additionnant cette relation à la relation $x^2 - y^2 = a^2$ et en divisant par 2, on obtient donc que

$$x^2 = \frac{a^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

et donc que

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

La relation $2xy = b$ nous donne alors les deux valeurs de y correspondantes :

$$y = \pm\frac{2b}{\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}}.$$

Les deux racines sont donc

$$\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\frac{2b}{\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}}, \quad -\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\frac{2b}{\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}}$$

2.2 Remarque importante.

Il ne faut jamais écrire $\sqrt{z}$ quand $z \in \mathbb{C}$

Quand x est un réel positif, l'équation $y^2 = x$ admet toujours deux racines, une positive et l'autre négative. On a donc un moyen simple de différencier les racines, c'est leur signe, on choisit de noter la racine positive $\sqrt{x}$. Dans ce cas, on a $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

Quand α est un complexe, l'équation $z^2 = \alpha$ admet toujours deux solutions opposées. On pourrait choisir la racine qui a une partie réelle positive (et qui n'est pas de la forme $-ib$ avec $b \in R^+$) pour définir une fonction racine complexe. Mais ce choix donne une fonction qui n'est pas continue, et qui ne vérifie pas $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$. On risque de faire plein d'erreur avec une telle fonction. Et tous les choix possibles pour la racine posent les mêmes problèmes. Le plus simple est de se passer d'une fonction racine complexe.

2.3 Racines $n-$ièmes de $a \in \mathbb{C}$ pour $n \geq 3$.

Soit $n \geq 3$ un entier et $a \in \mathbb{C}$. On cherche les z tels que $z^n = a$.

Si $a = 0$, alors seul $z = 0$ est solution de $z^n = 0$.

Si $a \neq 0$, alors on peut écrire $a = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Posant $z = re^{i\theta}$, nous avons $z^n = r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}$.

Donc $|z^n| = r^n = |\rho e^{i\varphi}| = \rho$, ce qui nous donne que $r = \rho^{1/n}$. Nous avons alors $e^{in\theta} = \varphi$, ce qui est équivaut à l'existence d'un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = \varphi + 2k\pi$, ou encore $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

Nous en déduisons que l'ensemble des racines $n-$ièmes de a est

$$S = \{\rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Or la suite $w_k = (e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)})_k$ est périodique de période n car, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$w_{k+n} = e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(k+n)\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right)} = e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = w_k.$$

On en déduit que l'ensemble S se réduit à l'ensemble

$$S = \{\rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}.$$

2.4 Équation $z_1^n = z_2^n$.

Cela n'implique pas $z_1 = z_2$, mais

$$z_1^n = z_2^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} \text{ est une racine } n\text{−ième de l'unité.}$$

Par exemple, pour $n = 2$, les racines carrées de l'unité sont 1 et -1, et cela donne $z_1 = \pm z_2$.

Pour $n = 3$, les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2, et cela donne $z_1 = z_2$ ou $z_1 = jz_2$ ou $z_1 = j^2 z_2$.

En particulier, si z_1 est une racine $n-$ième de a avec $a \neq 0$, alors toutes les racines $n-$ièmes de a sont les produits $z\omega_k$ où les ω_k décrivent l'ensemble des racines $n-$ièmes de 1.

Par exemple, pour $n = 2$, si z_1 est une racine carrée de $a \in \mathbb{C}$, l'autre racine est $-z_1$.

Pour $n = 3$, si z_1 est une racine cubique de a, les deux autres racines sont jz_1 et $j^2 z_1$.

Pour $n = 4$, si z_1 est une racine quatrième de a, les trois autres racines sont iz_1, $-z_1$ et $-iz_1$.

3 Somme des termes d'une suite géométrique.

Théorème. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

$$\text{Si } a = 1, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n} a^k = n,$$

$$\text{Si } a \neq 1, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Preuve. Le cas $a = 1$ est clair. Si $a \neq 1$, montrons par par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que cela soit vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1}}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1},$$

donc c'est vrai au rang $n + 1$.

On a donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Théorème. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in N$. Alors :*

$$\text{Si } x \in 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = n + 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin kx = 0.$$

$$\text{Si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Preuve. Notons
$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin kx.$$
On a
$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$
Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, le résultat énoncé est clair.

Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ix} \neq 1$, et donc
$$C_n + iS_n = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{2i \sin \frac{n+1}{2}x}{2i \sin \frac{x}{2}}.$$
On déduit de cela que
$$C_n = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\right) = \frac{\cos \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad S_n = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

4 Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes.

Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On cherche à résoudre l'équation
$$az^2 + bz + c = 0 \tag{$*$}$$
dans $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. En divisant par $a \neq 0$, on a
$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0.$$
Or
$$z^2 + \frac{b}{a}z = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$
On en déduit que z est solution de $(*)$ si et seulement si
$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0,$$
soit encore si et seulement si
$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - 4ac\right) = 0.$$
Notons δ_1 et δ_2 les deux racines carrées complexes (opposées) du nombre complexe $b^2 - 4ac$.

z est alors solution de $(*)$ si et seulement si
$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta_1^2}{4a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta_1}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta_1}{2a}\right) = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta_1}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta_2}{2a}\right) = 0.$$
On en déduit que les deux solutions de $(*)$ sont
$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}.$$

5 Inégalité triangulaire.

Théorème. Première inégalité triangulaire. *Pour tous z, z' dans $\mathbb{C}$, nous avons*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

avec égalité si et seulement $(z = 0)$ ou $(z' = 0)$ ou arg $z =$arg z'.

Preuve. En effet, si z, z' sont dans $\mathbb{C}$, on a

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \Leftrightarrow \quad |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (z + z')(\overline{z} + \overline{z}') \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad z\overline{z} + z\overline{z}' + z'\overline{z} + z'\overline{z}' \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 + z\overline{z}' + z'\overline{z} + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad z\overline{z}' + z'\overline{z} \leq 2|z||z'| \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{Re}(z\overline{z}') \leq 2|z\overline{z}'| \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z\overline{z}') \leq |z\overline{z}'|.$$

Or cette dernière inégalité est toujours vraie car, quel que soit le nombre complexe w, on a toujours Re $w \leq |w|$.

De plus, on déduit que nous avons l'égalité $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z\overline{z}') = |z\overline{z}'|$.

Il est clair que, si $z = 0$ ou si $z' = 0$, l'égalité $\mathrm{Re}(z\overline{z}') = |z\overline{z}'|$ est vraie.

Supposons $z \neq 0 \neq z'$. Si $w = z\overline{z}'$, alors $w \neq 0$. Il existe donc $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $w = re^{i\theta}$. Nous avons alors Re $w = r\cos\theta = |w| = r$. Ceci nous donne que $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc que $w = r$ est un réel positif. Nous avons alors $\arg(z\overline{z}') =$arg $z-$arg $z' =$arg $w = 0$ modulo 2π. Ceci termine la preuve du théorème.

6 Somme de deux complexes de module 1.

Si e^{iu} et e^{iv} sont deux nombres de module 1, alors on peut simplifier la somme $e^{iu} + e^{iv}$ en mettant en facteur $e^{i\frac{u+v}{2}}$:

$$e^{iu} + e^{iv} = e^{i\frac{u+v}{2}}(e^{i\frac{u-v}{2}} + e^{-i\frac{u-v}{2}}) = 2\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)e^{i\frac{u+v}{2}}.$$