Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1 Préliminaires.

Définition. Soient $a < b$ deux réels. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de la forme

$$[a, b], \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad]a, b[, \quad]b, +\infty[, \quad [b, +\infty[, \quad]-\infty, a], \quad]-\infty, a[, \quad]-\infty, +\infty[$$

sont appelés des *intervalles*.

Rappel. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle *exponentielle de z* et on note e^z le nombre complexe $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction $f : t \in I \mapsto e^{at} \in \mathbb{C}$ est dérivable et $f' : t \in I \mapsto ae^{at}$.

Preuve. En effet, si $a = \alpha + i\beta$ et si $t \in I$, on a $f'(t) = (e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))' = \alpha e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + e^{\alpha t}(-\beta \sin(\beta t) + i \cos(\beta t)) = (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) = ae^{at}$. $\square$

2 Equations Différentielles Linéaires du premier ordre à coefficients constants.

2.1 $y' - ay = 0$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$. On appelle *solution sur I de l'équation $y' - ay = 0$* toute fonction f dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, $f'(t) - af(t) = 0$.

Théorème. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Toute solution f de l'équation $y' - ay = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est de la forme $f(t) = Ce^{at}$ pour tout $t \in I$ et où C est une constante.*

Preuve. En effet, pour toute constante C, la fonction $f(t) = Ce^{at}$ est solution sur I de l'équation proposée.

Réciproquement, si f est une fonction dérivable sur I solution de l'équation proposée et si on pose, pour $t \in I$, $\varphi(t) = f(t)e^{-at}$, alors φ est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = f'(t)e^{-at} - af(t)e^{-at} = (f'(t) - af(t))e^{-at} = 0 \times e^{-at} = 0.$$

On en déduit que la fonction φ est constante sur I. Notons C cette constante. On a donc, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = C$, donc $f(t) = Ce^{at}$. $\square$

2.2 $y' - ay = g$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle *solution sur I de l'équation $y' - ay = g$* toute fonction f dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, $f'(t) - af(t) = g(t)$.

Théorème. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Si f_0 est une solution de l'équation $y' - ay = g$, toute solution f de l'équation $y' - ay = g$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est de la forme $f(t) = Ce^{at} + f_0(t)$ pour tout $t \in I$ et où C est une constante.*

Preuve. En effet, la fonction $\varphi = f - f_0$ définie et dérivable sur I vérifie

$$\varphi' - a\varphi = (f - f_0)' - a(f - f_0) = f' - af - (f_0' - af_0) = g - g = 0.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $\forall t \in I$, $\varphi(t) = Ce^{at}$, donc que pour tout $t \in I$, $f(t) = f_0(t) + Ce^{at}$. $\square$

2.3 Variation de la constante.

On appelle "Méthode de variation de la constante" la méthode que nous allons exposer destinée à rechercher une solution particulière f_0 de l'équation $y' - ay = g$ précédente.

Il s'agit de faire la chose suivante : on sait que les solutions f de l'équation homogène $y' - ay = 0$ sont de la forme $f(t) = Ce^{at}$ où C est une constante.

On cherche une fonction $f_0(t)$ solution de $y' - ay = g$ de la forme $f_0(t) = \varphi(t)e^{at}$ où φ est dérivable (la constante C est remplacée par une fonction, d'où le nom "variation de la constante").

On a alors :

$$\forall t \in I, \qquad f_0'(t) - af_0(t) = (\varphi'(t)e^{at} + \varphi(t)ae^{at}) - a\varphi(t)e^{at} = \varphi'(t)e^{at} = g(t),$$

ce qui nous donne $\varphi'(t) = g(t)e^{-at}$. Il suffit alors de trouver une primitive de $g(t)e^{-at}$ pour conclure.

3 Equations Différentielles Linéaires du second ordre à coefficients constants.

On s'intéresse dans ce paragraphe aux solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{C}$. On appelle *solution sur I de l'équation $y'' + ay' + by = 0$* toute fonction f dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$.

Théorème. *Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère les solutions complexes r_1 et r_2 de l'équation $r^2 + ar + b = 0$.*
- *Si $r_1 = r_2$, toutes les solutions f de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont de la forme $f(t) = (At + B)e^{r_1 t}$ pour $t \in I$ et où A et B sont deux constantes.*
- *Si $r_1 \neq r_2$, toutes les solutions f de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont de la forme $f(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ pour $t \in I$ et où A et B sont deux constantes.*

Preuve. On cherche les nombres complexes α, β tels que, si on pose $z(t) = f'(t) + \alpha f(t)$ pour tout $t \in I$ et pour f solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$, on ait $z'(t) = \beta z(t)$ pour tout $t \in I$.

Pour cela on écrit que :

$$\forall t \in I, \qquad z'(t) = \beta z(t) \quad \Leftrightarrow \quad f''(t) + \alpha f'(t) = \beta f'(t) + \beta\alpha f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f''(t) + (\alpha - \beta)f'(t) - \alpha\beta f(t) = 0$$

Il faut donc que $\alpha - \beta = a$ et que $\alpha\beta = -b$, soit encore que $-\alpha$ et β soient les racines de $r^2 + ar + b = 0$.

Supposons donc que l'équation $r^2 + ar + b = 0$ ait deux racines complexes différentes r_1 et r_2.

Posant $z(t) = f'(t) - r_1 f(t)$ pour tout $t \in I$, on obtient que $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$ pour tout $t \in I$ si et seulement si $z'(t) = r_2 z(t)$ pour tout $t \in I$. On obtient l'existence d'une constante C_1 telle que pour tout $t \in I$, on ait $z(t) = C_1 e^{r_2 t}$.

On a alors, $f'(t) - r_1 f(t) = C_1 e^{r_2 t}$ pour tout $t \in I$. En particulier,

$$\forall t \in I, \qquad (f(t)e^{-r_1 t})' = (f'(t) - r_1 f(t))e^{-r_1 t} = C_1 e^{(r_2 - r_1)t},$$

donc il existe une constante C_2 telle que

$$\forall t \in I, \qquad (f(t)e^{-r_1 t}) = \frac{C_1}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)t} + C_2,$$

ce qui donne

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = \frac{C_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} + C_2 e^{r_1 t}.$$

Supposons maintenant que l'équation $r^2 + ar + b = 0$ ait une seule racine complexe r_1.

Posant $z(t) = f'(t) - r_1 f(t)$ pour tout $t \in I$, on obtient que $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$ pour tout $t \in I$ si et seulement si $z'(t) = r_1 z(t)$ pour tout $t \in I$. On obtient l'existence d'une constante C_1 telle que pour tout $t \in I$, on ait $z(t) = C_1 e^{r_1 t}$.

On a alors, $f'(t) - r_1 f(t) = C_1 e^{r_1 t}$ pour tout $t \in I$. En particulier,

$$\forall t \in I, \qquad (f(t)e^{-r_1 t})' = (f'(t) - r_1 f(t))e^{-r_1 t} = C_1,$$

donc il existe une constante C_2 telle que

$$\forall t \in I, \qquad (f(t)e^{-r_1 t}) = C_1 t + C_2,$$

ce qui donne

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = (C_1 t + C_2)e^{r_1 t}.$$

$\square$