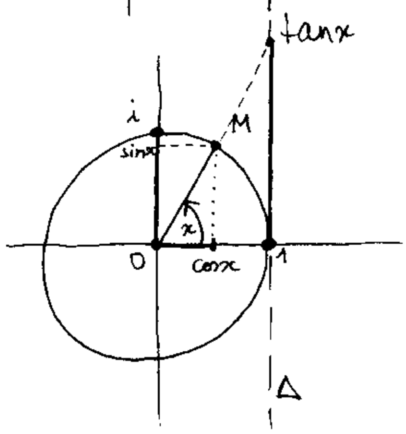
Université de Provence 2010 - 2011

Résumé de cours n°2 Fonctions usuelles.

1 Fonctions circulaires (sin, cos, tan).

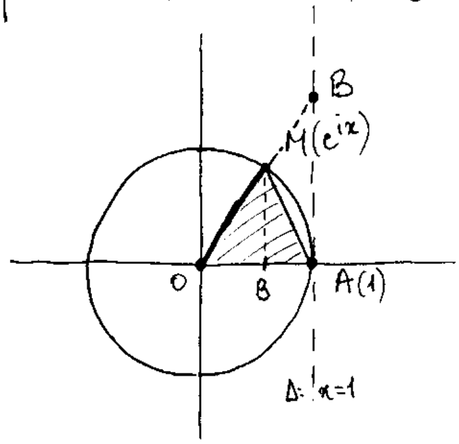
1 def Soit $\mathcal{C}(0,1)$ le cercle de centre O, origine du repère, et de rayon 1. Pour tout nombre réel x, le point M de $\mathcal{C}$ tel que l'angle entre OM et l'axe des abscisses ait pour mesure x, a comme coordonnées $(\cos x, \sin x)$.



Ceci définit deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, resp. paire et impaire.

En utilisant le théorème de Thalès : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{X}$ où X est l'ordonnée du point d'intersection des droites (OM) et $\Delta : x=1$. On en déduit $X = \frac{\sin x}{\cos x}$ appelée tangente de x, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2 propriétés de continuité et dérivabilité.



- comparons les aires du triangle OAM et du secteur angulaire OAM.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{2} \sin x \times 1 \leqslant \frac{x}{2}$

car $2\pi \longmapsto \pi \times 1^2$ donc $x \longmapsto \frac{x}{2}$. donc $\sin x \leqslant x$

ceci reste vrai pour $x=0$ et comme sin est impaire,
on a $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|\sin x| \leq |x|$ donc $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

Puisque $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

On dit que sin et cos sont continues en 0 :
$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0$ et $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$.

En utilisant les formules rappelées à l'exercice 3, on obtient :
$\forall h \in \mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\sin(x_0+h) =$
donc $\lim_{h \to 0} \sin(x_0+h) =$

et $\cos(x_0+h) =$
d'où $\lim_{h \to 0} \cos(x_0+h) =$

Ce qui donne la continuité de sin et cos sur $\mathbb{R}$.

•• comparons les aires du triangle OAM, du secteur angulaire OAM et du triangle OAB :

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x$

donc ($\sin x > 0$) $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ cad $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

Conclusion $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ et sin étant impaire, et $x \mapsto x$ aussi, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Ce qui signifie que sin est dérivable en 0, de nombre dérivé égal à 1 en 0.

En réutilisant les formules de l'exercice 3.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall h$, $\dfrac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} =$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} =$

cad sin est dérivable de dérivée cos.

De même cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $-\sin$.

Quant à la fonction tangente :
sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est dérivable car cos ne s'annule pas
donc $\tan'(x) =$

② Fonctions circulaires réciproques.

a) fonction Arcsinus.

sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la fonction sinus est bijective à valeurs dans $[-1,1]$, car elle est continue et strictement croissante (cf semestre 2 : théorème de la bijection)

La bijection réciproque de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est appelée Arcsinus.

On a donc : $\forall x \in [-1,1]$, Arcsin$x$ est l'unique élément y de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin y = x$:

$$\boxed{y = \text{Arcsin}\, x \iff \begin{cases} \sin y = x \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}}$$

En tant que bijection réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[\ ,\quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\mathrm{Arcsin}\,x)} = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}\,x)}$$

or $\cos^2(\mathrm{Arcsin}\,x) = 1 - \sin^2(\mathrm{Arcsin}\,x) = 1 - x^2$

et puisque $\mathrm{Arcsin}\,x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\mathrm{Arcsin}\,x) > 0$.

D'où $\cos(\mathrm{Arcsin}\,x) = +\sqrt{1-x^2}$.

Conclusion $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

b) fonction Arccosinus.

C'est sur $[0,\pi]$ que la fonction cosinus est bijective (continue et strictement décroissante). Sa bijection réciproque, de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$ est appelée fonction Arccosinus.

On a donc : $\forall x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arccos}\,x$ est l'unique élément y de $[0,\pi]$ tel que $\cos y = x$: $\boxed{y = \mathrm{Arccos}\,x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x \\ y \in [0,\pi] \end{cases}}$

De même que précédemment, Arccos est dérivable sur $]-1,1[$, car cos est dérivable sur $]0,\pi[$ et de dérivée non nulle.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\ ,\quad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Remarquons que la fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée nulle. Donc elle est constante. Or en 0, elle vaut $\frac{\pi}{2}$. et en ± 1 aussi.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}}$

c) fonction Arctangente.

Restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la fonction tangente est bijective à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque, de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est appelée Arc tangente.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}\, x$ est l'unique élément y de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan y = x$: $\boxed{y = \mathrm{Arctan}\, x \iff \begin{cases} \tan y = x \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}}$

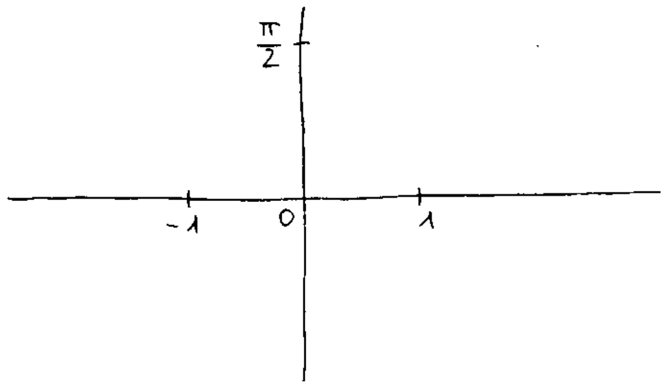
Comme tan est dérivable, de dérivée non nulle sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a Arctan dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}.$$

cf Exercice 15 TD2. Calculer la dérivée de $x \mapsto \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Exercice 17 TD2 : Mq $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$

Représentation graphique des fonctions circulaires et des fonctions circulaires réciproques :



3) Fonctions logarithmes et exponentielles.

a) Logarithme népérien

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle, qui diffèrent d'une constante. (Ce résultat sera vu au second semestre).

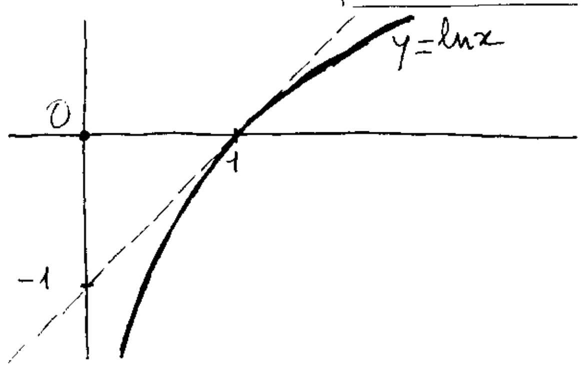
def : On appelle logarithme népérien, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1, elle est notée $x \mapsto \ln x$.

ln est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$, sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement positive donc ln est strictement croissante.

rem1. Pour tout $y>0$, $x \mapsto \ln(xy)$ est aussi une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, d'où $\ln(xy) = \ln x + C$. Pour $x=1$, on obtient $\ln y = C$, d'où : $\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$.
(on dit que ln est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

On en déduit :
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x>0,\ \ln \frac{1}{x} = -\ln x \\ \forall x,y>0,\ \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \\ \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x>0,\ \ln(x^n) = n \ln x \end{array}}$$

rem2. ln étant s↗, elle admet, en $+\infty$, une limite finie ou alors $+\infty$; or $\lim_{n\to+\infty} \ln 2^n = +\infty$, d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$
et aussi $\boxed{\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty}$



rem 3. $\forall x>0$, $\ln x \leq x-1$.

b) <u>exponentielle de base e.</u>

déf. la bijection réciproque de ln de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (comme fonction continue et strictement croissante : th de la bijection) est appelée exponentielle et notée : exp.

on a $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

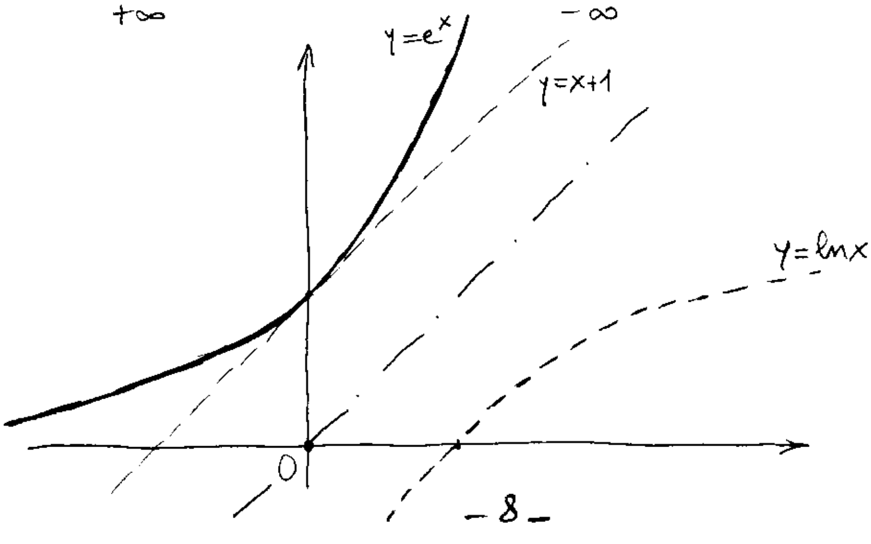
$\forall x,y \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

On remarque : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = \exp(n.1) = (\exp(1))^n$; en notant e le nb réel $\exp(1)$ (environ 2,72), on peut alors écrire (de manière plus compacte) $\exp(n) = e^n$.
On convient alors de généraliser l'écriture pour tout x de $\mathbb{R}$; la fct exp est appelée <u>exponentielle de base e</u>

Sa dérivée sur $\mathbb{R}$ est ~~donnée~~ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = \dfrac{1}{1/e^x} = e^x$
Donc <u>exp de base e est égale à sa dérivée.</u>

On a aussi $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$.



c) <u>exponentielle de base quelconque.</u>

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle exponentielle de base a, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp_a(x) = e^{x\ln a}$

$\exp_a$ est encore un morphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, par conséquent : $\forall n \in \mathbb{Z}, \ \exp_a(n) = \exp_a(1)^n = a^n$

On convient alors d'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp_a(x) = a^x$

Avec cette nouvelle notation, on a les propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ a^x = e^{x\ln a}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ln(a^x) = x\ln a$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ a^{x+y} = a^x . a^y$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ (a^x)^y = a^{xy}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \ \ (ab)^x = a^x b^x$

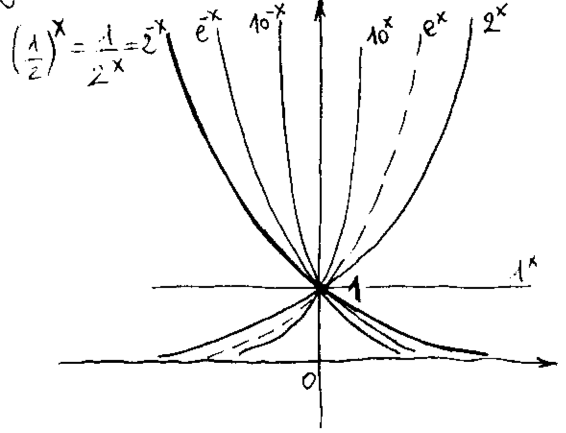
preuve des 2 dernières prop :

$\rightarrow$

$\rightarrow$

La dérivée de $\exp_a$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp_a)'(x) = a^x \ln a$

en effet la dérivée de $x \mapsto e^{x\ln a}$ est :



si $a > 1$ $\exp_a$ est $\nearrow$

si $a < 1$ $\exp_a$ est $\searrow$

si $a = 1$ $\exp_1$ est constante égale à 1.

d) <u>logarithme de base quelconque.</u>

Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\exp_a$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ (en tant que fct continue et strictement monotone.)
La bijection réciproque est appelée logarithme de base a et notée $\log_a$.

On a donc : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\begin{cases} y = \log_a x \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} x = a^y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Et l'on peut aussi écrire : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

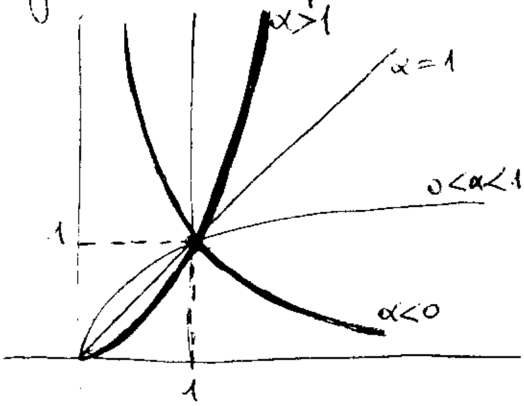
La dérivée de $\log_a$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

e) <u>fonctions puissances</u>

Grâce aux fonctions exponentielles, on sait élever un nombre réel strictement positif à la puissance d'un exposant réel quelconque.
On peut alors définir, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

f_α est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
car $(e^{\alpha \ln x})' =$

Ceci généralise ce qui était déjà connu pour les seuls exposants rationnels.



rem : si $\alpha = 0$, $f_0 = c^{te} = 1$
si $\alpha > 0$, f_α s↗
si $\alpha < 0$ f_α s↘

④ Fonctions hyperboliques.

a) fonctions sinus et cosinus hyperbolique, et tangente hyp.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ et $\underline{\mathrm{sh}x} = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

(remarque : il y a une analogie avec $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$).

ch et sh sont appelées respectivement cosinus et sinus hyperboliques.

Il est évident que ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\boxed{\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \text{ et } \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}}$

Remarque : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\mathrm{ch}x - \dfrac{e^{x}}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\mathrm{sh}x - \dfrac{e^{x}}{2}\right) = 0$, donc les courbes $y = \mathrm{ch}x$ et $y = \mathrm{sh}x$ et $y = \dfrac{e^{x}}{2}$ sont asymptotes en $+\infty$; précisément, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}x < \dfrac{e^{x}}{2} < \mathrm{ch}x$.

La fonction tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$, par :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{\mathrm{th}x} = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

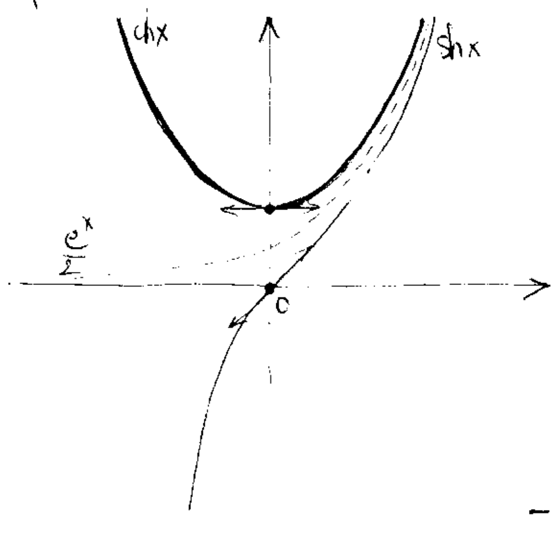
sh et th sont impaires, tandis que ch est paire.

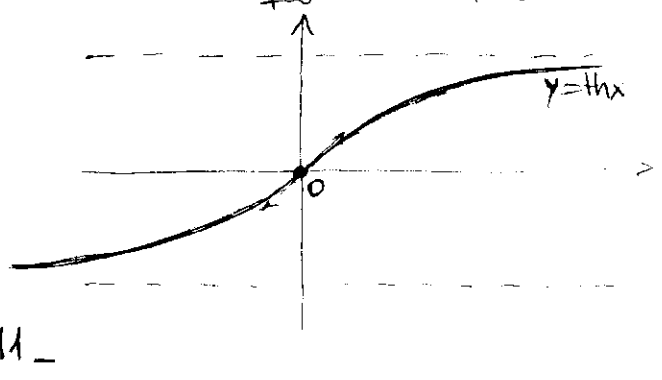
enfin ~~th'x =~~

rem : $\boxed{\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1}$

d'où $\mathrm{th}'x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x} = 1 - \mathrm{th}^2x$

th est s$\nearrow$, $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{th}x = 1$, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{th}x = -1$





Remarque. Puisque $ch^2 x - sh^2 x = 1$, en posant $X = ch\,x$ et $Y = sh\,x$ on a $X^2 - Y^2 = 1$ et $X \geq 1$. Dans le plan, rapporté à un repère orthonormal, le point de coord (X, Y) décrit donc une demi hyperbole équilatère.

Il y a donc une analogie entre sin et cos qui servent à paramétrer le cercle d'éq $X^2 + Y^2 = 1$, et sh et ch qui servent à paramétrer la demi-hyperbole $\begin{cases} X^2 - Y^2 = 1 \\ X \geq 1 \end{cases}$.

On retrouve de nombreuses formules de trigonométrie, au signe près.

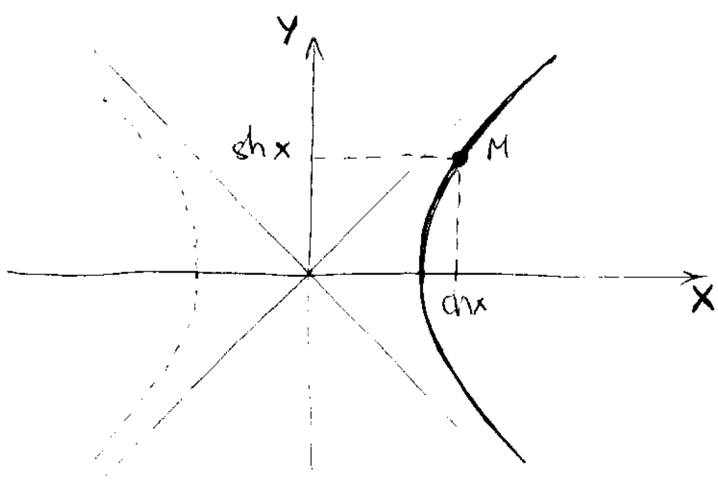
(exo : calculer $ch(a+b)$, $sh(a+b)$, $ch(2a)$, $sh(2a)$).

$ch(a+b) =$

$sh(a+b) =$

$ch(2a) =$

$sh(2a) =$



⑤ Fonctions hyperboliques réciproques.

a) fonction argument sinus hyperbolique.

sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique, notée $x \longmapsto \text{Argsh}\, x$.

Remarquons que $y = \text{Argsh}\, x \iff x = \text{sh}\, y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

posons $Y = e^y$. l'équation devient $2x = Y - \dfrac{1}{Y}$, ou encore

$Y^2 - 2xY - 1 = 0$. $\Delta' = x^2 + 1 > 0$.

2 solutions $Y = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Comme $Y = e^y$, on garde seulement la solution positive, cad $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$;

finalement $y = \boxed{\text{Argsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$

sh étant dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, on a Argsh dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\text{Argsh}'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' =$$

donc $\boxed{\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

b) fonction Argument cosinus hyperbolique

La restriction à $\mathbb{R}^+$ de ch est continue, strictement croissante donc bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.
Sa bijection réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et notée Argch

En résolvant l'équation $y = \text{Argch}\, x \Leftrightarrow x = \text{ch}\, y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$
et en posant encore $Y = e^y$,
on trouve, puisque $y \geq 0$ (càd $Y \geq 1$) : $Y =$

D'où $y = \boxed{\text{Argch}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).}$

ch est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$, sa dérivée ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*_+$, Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$\forall x > 1$, $\text{Argch}'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right)' =$

Donc $\boxed{\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$

c) fonction argument tangente hyperbolique

th est continue, s.↗ sur $\mathbb{R}$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$; sa bijection réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et notée Argth

$y = \text{Argth}\, x \Leftrightarrow x = \text{th}\, y = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$. en posant $Y = e^{2y}$,
l'éq. devient $Y - 1 = x(Y + 1)$ càd $Y = \frac{1+x}{1-x}$. $(x \in]-1, 1[)$.

D'où $y = \boxed{\text{Argth}\, x = \frac{1}{2} \ln Y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ car $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

th est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'où Argth est dérivable sur $]-1, 1[$, avec

$\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Argth}'x = \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' =$

d'où $\boxed{\text{Argth}'x = \frac{1}{1 - x^2}}$