

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

RELATIONS D'ORDRE. DÉNOMBREMENT. PLUS GRAND ÉLÉMENT. BORNE SUPÉRIEURE.

1 Relations d'ordre.

1.1 Relations d'ordre. Ensembles ordonnés.

Définition. Soit E un ensemble muni d'une relation binaire \mathcal{R} . On dit que \mathcal{R} est une *relation d'ordre* sur E ou que (E, \mathcal{R}) est un *ensemble ordonné* si et seulement si \mathcal{R} possède les propriétés suivantes :

- *Réflexivité* : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x.$
- *Anti-symétrie* : $\forall(x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y.$
- *Transitivité* : $\forall(x, y, z) \in E^3, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

Exemples.

- Dans l'ensemble des nombres réels, l'inégalité large $x \leq y$ est une relation d'ordre.
- Dans l'ensemble des nombres naturels, la relation a divise b , notée $a|b$ est une relation d'ordre.
- Dans l'ensemble des parties d'un ensemble, la relation $A \subset B$ est une relation d'ordre.

Remarques. Bien faire attention au fait que l'anti-symétrie n'est pas la négation de la symétrie. Il existe des relations qui sont à la fois symétriques et anti-symétriques.

D'une manière générale, les symboles pour désigner les relations d'ordre sont $\leq, \preceq, \ll, \dots$

1.2 Majorants, minorants. Plus grand élément. Plus petit élément.

Définition. Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné et A une partie de E .

- On dit que $M \in E$ est *majorant* de A si et seulement si : $\forall x \in A, x \preceq M.$
- On dit que $m \in E$ est *minorant* de A si et seulement si : $\forall x \in A, m \preceq x.$

Exemples. Par exemple, si $(E, \preceq) = (\mathbb{R}, \leq)$ et si $A = [0, 1[, B = \mathbb{Z}, C = [1, 2]$, alors tout réel $x \geq 1$ est majorant de A , tout réel $x < 0$ est minorant de A , il n'y a ni minorant, ni majorant de B , tout réel $x > 2$ est majorant de C , tout réel $x < 1$ est minorant de C .

Si $(E, \preceq) = (\mathbb{N}, |)$ et si $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, les majorants de D sont tous les nombres divisibles par 1, 2, 3, 4, 5, 6, donc divisibles par PPCM(2, 3, 4, 5, 6) = $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Définition. Avec les notations précédentes, on dit que A est *majorée* s'il existe au moins un majorant de A . De même, on dit que A est *minorée* s'il existe au moins un minorant de A .

Définition. Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné et A une partie de E . Soit $a \in E$. On dit que :

- a est un *plus grand élément* de A si et seulement si a est majorant de A et $a \in A$.

- a est un *plus petit élément* de A si et seulement si a est minorant de A et $a \in A$.

Exemples. Pour reprendre les exemples précédents,

- A n'a pas de plus grand élément mais a un plus petit élément 0.

- B n'a ni plus grand élément, ni plus petit élément.

- C a pour plus petit élément 1 et pour plus grand élément 2.

- D n'a pas de plus grand élément mais a pour plus petit élément 1.

Théorème. Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné et A une partie de E . Si A possède un plus grand élément, celui-ci est unique. Il en est de même pour le plus petit élément.

Preuve. En effet, soient a et a' deux plus grands éléments de A .

Comme $a \in A$ et que a' est majorant de A , on a $a \preceq a'$.

Comme $a' \in A$ et que a est majorant de A , on a $a' \preceq a$.

L'antisymétrie de \preceq nous donne $a = a'$.

Définition. Si A un sous-ensemble de (E, \preceq) possède un plus grand élément, celui-ci est unique et on le note $\max A$.

De même, si le plus petit élément existe, celui-ci est unique et on le note $\min A$.

Nous avons vu dans les exemples précédents que les parties de \mathbb{R} , qu'elles soient majorées ou non, non pas forcément de plus grand élément.

Par contre, et c'est un des axiomes de construction de l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} ou de l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , nous avons :

Axiomes Toute partie non vide majorée de \mathbb{N} possède un plus grand élément.

Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de \mathbb{Z} possède un plus grand élément.

Toute partie non vide minorée de \mathbb{Z} possède un plus petit élément.

Comme application, nous pouvons construire la partie entière des réels.

Théorème et définition. Si x est un nombre réel, il existe un et un seul entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. On le note $[x]$ ou $E(x)$. De plus $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z}/n \leq x\}$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $A = \{n \in \mathbb{Z}/n \leq x\}$. C'est un sous-ensemble de \mathbb{Z} non vide (car il existe des entiers relatifs plus petits que x) et majoré (car il existe des entiers relatifs strictement plus grands que x). Donc A possède un plus grand élément, n .

On a $n \in A$, donc $n \leq x$.

Comme n est majorant de A , $n + 1$ aussi. On ne peut avoir $n + 1 \in A$. En effet, si c'était le cas, on aurait deux éléments n et $n + 1$ qui seraient tous les deux dans A et qui seraient majorants de A . Ceci contredirait l'unicité du plus grand élément de A .

On a donc $n + 1 \notin A$, ce qui implique que $n + 1 > x$.

Ceci montre bien l'existence de la partie entière de x . Reste à voir l'unicité de celle-ci.

Supposons que $n' \in \mathbb{Z}$ soit tel que $n' \leq x < n' + 1$. Nous allons montrer que nécessairement, $n' = n$.

Si $n' < n$, alors $n' + 1 \leq n \leq x$, ce qui est impossible car $x < n' + 1$.

De même, $n < n'$ est impossible. On a donc bien $n = n'$.

1.3 Bornes supérieures, borne inférieures.

Définition. Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné et A une partie de E .

On dit que $a \in E$ est *borne supérieure* de A si et seulement si a est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A .

On dit que $a \in E$ est *borne inférieure* de A si et seulement si a est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A .

Il découle de l'unicité du plus grand élément et du plus petit élément d'un ensemble que les bornes supérieures et inférieures, si elles existent, sont uniques.

On note la borne supérieure, $\sup A$, et la borne inférieure, $\inf A$.

Exemples. Pour reprendre les exemples précédents,

- $\sup A = 1$, $\inf A = 0$. - $\sup B$ et $\inf B$ n'existent pas - $\sup C = 2$ et $\inf C = 1$. - $\sup D = 60$ et $\inf D = 1$.

En général, si la borne supérieure d'un ensemble A existe, elle n'est pas le plus grand élément de A car elle n'a aucune raison d'appartenir à A (voir l'exemple de l'ensemble A ci-dessus).

Mais par contre, si un ensemble A admet un plus grand élément $a = \max A$, alors a est la borne supérieure de A . Ceci prouve que la notion de borne supérieure est une notion plus générale que la notion de plus grand élément.

Théorème. Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné et $A \subset E$. Si A admet un plus grand élément a , alors a est borne supérieure de A .

Preuve. Pour montrer que a est égal à la borne supérieure de A , il faut montrer que a est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A . Or a est majorant de A . Il reste donc à prouver que a est minorant de

l'ensemble des majorants de A , c'est-à-dire que, pour tout majorant M de A , on a $a \leq M$. Or ceci est bien le cas car $a \in A$.

1.4 Cas de \mathbb{R} .

L'une des propriétés fondamentales de \mathbb{R} est la suivante :

Axiome. Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} possède une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} possède une borne inférieure.

Nous avons aussi le théorème suivant, très important, appelé "Théorème de passage à la borne supérieure" :

Théorème. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A, x \leq M$. Alors $\sup A$ existe et $\sup A \leq M$.

Il y a bien entendu un énoncé tout à fait analogue pour la borne inférieure.

Preuve. La borne supérieure existe car A est non vide et majorée. Comme M est un majorant de A , on en déduit que $\sup A$ qui est le plus petit élément de l'ensemble des majorants vérifie $\sup A \leq M$.

Attention toutefois au faux théorème de passage à la borne supérieure. L'énoncé suivant : " $\forall x \in A, x < M$ implique $\sup A < M$ " est un énoncé faux. Si par exemple $A = [0, 1[$ et $M = 1$, on a : $\forall x \in A, x < 1$ et pourtant $\sup A = 1$. Il est donc très important dans le théorème de passage à la borne supérieure que les inégalités soient larges.

Enfin, nous avons le théorème de caractérisation de la borne supérieure d'un sous-ensemble de \mathbb{R} suivant :

Théorème. Soit A une partie non vide majorée de \mathbb{R} et $s \in \mathbb{R}$. Alors $s = \sup A$ si et seulement si,

$$\forall x \in A, \quad x \leq s$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad x \geq s - \varepsilon.$$

Preuve. En effet, si $s = \sup A$, alors s vérifie la première propriété.

Pour la seconde, on remarque que, si $\varepsilon > 0$, comme $s - \varepsilon < s$ et que s est le plus petit des majorants, alors $s - \varepsilon$ n'est pas majorant de A . Et donc, il existe $x \in A$ tel que $x > s - \varepsilon$. Ceci prouve le deuxième point.

Réciproquement, si s vérifie les deux propriétés, montrons que $s = \sup A$.

Tout d'abord, il découle de la première propriété que s est majorant de A . Montrons que s est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A , c'est-à-dire que s est minorant de l'ensemble des majorants.

Soit M un majorant de A . Montrons que $s \leq M$. Si $M < s$, alors, pour $\varepsilon = \frac{s-M}{2} > 0$, on sait qu'il existe $x \in A$ tel que $x \geq s - \varepsilon$. On a alors $x \geq s - \frac{s-M}{2} = \frac{M+s}{2} > M$ car $M > s$. On a donc exhibé un élément x de A tel

que $x > M$. Ceci contredit le fait que M soit un majorant de A . On a donc bien prouvé que $s \leq M$, et que s est la borne supérieure de l'ensemble A .

2 Produit cartésien d'ensembles finis.

2.1 Ensembles $E \times F$ et F^p . p -uplets.

Rappel de choses vues dans le premier chapitre.

Définition. E et F sont deux ensembles finis non vides. Le *produit cartésien* de E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ formés d'un élément x de E suivi d'un élément y de F .

Exemple. Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$, on a

$$E \times F = \{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1), (c; 2)\}$$

Définition. Soit p un entier naturel non nul, E_1, \dots, E_p p ensembles finis non vides. Le *produit cartésien* de E_1, E_2, \dots, E_p , noté $E_1 \times \dots \times E_p$, est l'ensemble des p -uplets $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ formés d'un élément x_1 de E_1 suivi d'un élément x_2 de E_2 , etc ...

Si E_1, \dots, E_p sont tous égaux à E , on note $E \times \dots \times E = E^p$.

Exemple. On lance simultanément trois dés discernables, par exemple rouge, vert et blanc ; et on note les numéros des faces.

Le résultat d'un tel lancer peut se noter à l'aide d'un triplet $(x; y; z)$ où x est le numéro du dé rouge, y celui du dé vert et z celui du dé blanc.

Si E désigne l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, à chaque lancer des trois dés est associé un élément de E^3 .

2.2 Cardinal d'un produit d'ensembles.

Théorème. Si E et F sont deux ensembles finis, alors

$$\text{Card}(E \times F) = (\text{Card } E) \cdot (\text{Card } F).$$

Plus généralement, si E_1, \dots, E_p sont p ensembles finis

$$\text{Card}(E_1 \times \dots \times E_p) = (\text{Card } E_1) \cdot (\text{Card } E_2) \cdot \dots \cdot (\text{Card } E_p).$$

Enfin, si E est un ensemble fini et p un entier naturel non nul,

$$(\text{Card } E^p) = (\text{Card } E)^p.$$

Exemple. Dans un jeu de bridge, il y a 52 cartes. Chacune de ces cartes peut être considérée comme un élément du produit cartésien $E \times F$, où E est l'ensemble des quatre couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle) et F celui des treize valeurs (as, 2, 3, ..., 9, 10, valet, dame, roi). Notez que l'on a bien $\text{card}(E \times F) = 4 \times 13 = 52$.

3 Arrangements. Permutations.

3.1 Arrangements.

Définition. n et p sont des naturels tels que $1 \leq p \leq n$ et E est un ensemble à n éléments. Un *arrangement* de p éléments de E est un p -uplet d'éléments deux à deux distincts de E .

Exercice. Ecrire tous les arrangements de trois éléments de $\{a, b, c, d\}$.

3.2 Nombre d'arrangements.

Dans le cas général, notons $E = \{a_1, \dots, a_n\}$. Pour fabriquer un arrangement de p éléments de E , on a le choix entre n éléments pour la première position. Ce choix étant fait, on peut alors mettre $n - 1$ éléments possibles en deuxième position. En continuant comme cela jusqu'à la p -ième position, on peut alors y placer $n - p + 1$ éléments possibles. Le nombre d'arrangements est donc $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1)$.

Théorème. n et p sont des naturels tels que $1 \leq p \leq n$ et E est un ensemble à n éléments. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

3.3 Permutations.

Définition. n est un naturel non nul et E un ensemble à n éléments. Une *permutation* des éléments de E est un arrangement de n éléments de E .

Théorème. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

4 Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ($p \leq n$).

4.1 Nombre de parties à p éléments. Combinaisons.

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$ et soit $1 \leq p \leq n$. Nous savons que le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi les n de E est A_n^p . Chaque partie à p éléments de E , par permutation de ses éléments, donne naissance à $p!$ des arrangements précédents. Le nombre de parties à p éléments est donc $\frac{A_n^p}{p!}$. Si $p = 0$, cela est encore vrai.

Théorème. Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments avec $p \leq n$ est $\frac{A_n^p}{p!}$. On note ce nombre C_n^p , on a donc :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n - p)! p!}.$$

Définition. Une partie à p éléments d'un ensemble E à n éléments ($p \leq n$) s'appelle une *combinaison* de p des n éléments de E .

4.2 Propriétés des C_n^p .

Pour tout entier naturel n , $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $C_n^1 = n$.

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$, soit $p \leq n$ et soit A une partie de E à p éléments. Choisir les p éléments de A dans E , c'est aussi choisir les $n - p$ éléments du complémentaire de A dans E . Il y a donc autant de parties à p éléments de E que de parties à $n - p$ éléments de E .

Théorème. Pour tous naturels n et p tels que $p \leq n$ on a :

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

Soit E un ensemble à $n \geq 1$ éléments et soit p tel que $1 \leq p \leq n - 1$. Notons a l'un des éléments de E . Notons \mathcal{A} l'ensemble des parties de E à p éléments qui contiennent a et \mathcal{B} l'ensemble des parties de E à p éléments qui ne contiennent pas a . Choisir une partie de \mathcal{A} revient à choisir une partie à $p - 1$ éléments dans $E \setminus \{a\}$ à laquelle on rajoute $\{a\}$. Il y a donc C_{n-1}^{p-1} telles parties. Choisir une partie de \mathcal{B} revient à choisir une partie à p éléments dans $E \setminus \{a\}$. Il y a donc C_{n-1}^p telles parties.

Théorème. Pour tous naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n - 1$ on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Il découle de ce théorème, en faisant une récurrence sur n :

Formule du binôme de Newton. Pour tous complexes a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Corollaire. Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n.$$