Université de Provence 2001–2012

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

SUITES.

1 Suites convergentes

1.1 Définition.

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que *la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ* et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Proposition. *La suite $(u_n)_n$ de nombres réels converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\} \text{ est fini.}$$

Preuve. En effet, si $\varepsilon > 0$ et si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\}$ est fini, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\} \subset \{0, 1, \ldots, N\}$. En particulier, pour tout $n \geq N + 1$, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On a donc bien prouvé que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N + 1$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, et donc que $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Réciproquement, si la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ceci prouve que $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\}$ est inclus dans $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$, et donc que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\}$ est fini. □

Proposition. *La suite $(u_n)_n$ de nombres réels converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(|u_n - \ell|)_n$ converge vers 0.*

Preuve. En effet, si $(v_n)_n = (|u_n - \ell|)_n$, on a

$$(\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad 0 \leq v_n \leq \varepsilon).$$

□

1.2 Suites stationnaires.

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_n$ *est stationnaire* si et seulement si

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n = u_N.$$

Autrement dit, $(u_n)_n$ est constante à partir d'un certain rang.

Proposition. *Toute suite stationnaire est convergente.*

Preuve. À faire en exercice. □

1.3 Caractère borné et divergence vers $\pm\infty$.

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que :
– (u_n) est *majorée* si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq M.$$

– (u_n) est *minorée* si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq m.$$

– $(u_n)_n$ est *bornée* si et seulement si (u_n) est majorée et minorée.
– (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad u_n \geq A.$$

– (u_n) diverge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad u_n \leq A.$$

Proposition. *Une suite qui converge vers $+\infty$ n'est pas bornée.*

Preuve. En effet, si la suite (u_n) est bornée, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$, on ait $u_n \leq M$.

Or, comme $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq M+1$. On a alors : $\forall n \geq N, \quad M+1 \leq u_n \leq M$, ce qui est absurde. □

Remarque. Par contre il existe des suites non bornées qui ne tendent pas vers $+\infty$. La suite $((-1)^n n)_n$ par exemple, ou alors la suite qui vaut n si n est pair et 0 si n est impair.

1.4 Unicité de la limite.

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Si $(u_n)_n$ converge, sa limite est unique.*

Preuve. En effet, supposons que la suite $(u_n)_n$ ait deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$. Soit ε un réel strictement positif tel que $\varepsilon < \frac{1}{2}|\ell - \ell'|$.

Les intervalles $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et $]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$ de centres ℓ et ℓ' et de même longueur 2ε sont disjoints. En effet, si ce n'est pas le cas et si z est dans ces deux intervalles, on a alors $|z-\ell| \leq \varepsilon$ et $|z-\ell'| \leq \varepsilon$. L'inégalité triangulaire nous donne alors $|\ell-\ell'| = |(\ell-z)+(z-\ell')| \leq |\ell-z|+|z-\ell'| \leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon < |\ell-\ell'|$, ce qui est impossible.

La suite $(u_n)_n$ convergeant vers ℓ il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on ait $u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

La suite $(u_n)_n$ convergeant vers ℓ' il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, on ait $u_n \in]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$.

En particulier, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a $u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[= \emptyset$. C'est absurde. Ceci prouve bien que nécessairement, $\ell = \ell'$, et donc que la limite est unique.

□

1.5 Suites bornées.

Définition. Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que (u_n) est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée ou encore si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Si $(u_n)_n$ converge, alors elle est bornée.*

Preuve. En effet, si ℓ est la limite de la suite $(u_n)_n$, prenons $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| \leq 1$. On a alors, grâce à la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall n \geq N, \qquad |u_n| - |\ell| \leq ||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \leq 1,$$

donc : $\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq |\ell| + 1$.

En particulier, si $M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell|+1)$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$, et donc $(u_n)_n$ est bornée. $\square$

Remarque. la réciproque est fausse : par exemple, la suite $((-1)^n)_n$ qui vaut alternativement 1 et -1 est bornée mais ne converge pas.

2 Opérations sur les suites.

Théorème. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles qui convergent vers ℓ et ℓ' et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la suite de terme général $(u_n + \lambda v_n)_n$ converge vers $\ell + \lambda\ell'$.*

Preuve.

En effet, si $\varepsilon' > 0$, il existe un rang N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon'$.

Il existe un rang N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon'$.

En particulier, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$|(u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda\ell')| = |(u_n - \ell) + \lambda(v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |\lambda||v_n - \ell'| \leq \varepsilon' + |\lambda|\varepsilon' = (1 + |\lambda|)\varepsilon'.$$

On a bien prouvé que,

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad |(u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda\ell')| \leq \varepsilon.$$

En effet, il suffit, pour $\varepsilon > 0$ donné, de prendre ε' tel que $(1 + |\lambda|)\varepsilon' \leq \varepsilon$ pour avoir la conclusion désirée. $\square$

Théorème. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels qui convergent vers ℓ et ℓ'. Alors la suite de terme général $(u_n v_n)_n$ converge vers $\ell\ell'$.*

Preuve. On va prouver le lemme suivant :

Lemme. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de complexes telles que (u_n) soit bornée et $(v_n)_n$ tende vers 0. Alors $(u_n v_n)_n$ tend vers 0.*

Preuve du lemme. Comme $(v_n)_n$ est bornée, il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. La question est : existe-t-il un rang à partir duquel $|u_n v_n| \leq \varepsilon$?

En utilisant la majoration précédente, on a $|u_n v_n| \leq M|u_n|$, et on a

$$|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow M|u_n| \leq \varepsilon \Rightarrow |u_n v_n| \leq \varepsilon$$

Mais comme la suite $(u_n)_n$ converge vers zéro, il existe un rang N à partir duquel $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ (e/M est un réel strictement positif, donc on peut lui appliquer le critère de convergence). Et on a donc

$$n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |u_n v_n| \leq \varepsilon$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un rang N à partir duquel $|u_n v_n| \leq \varepsilon$. Ce qui veut dire que $(u_n v_n)_n$ converge vers zéro.

Revenons à la preuve du théorème. On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n v_n - \ell\ell' = u_n(v_n - \ell') + u_n\ell' - \ell\ell' = u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'.$$

La suite (u_n) converge, donc elle est bornée. D'après le lemme, la suite $(u_n(v_n - \ell'))_n$ converge vers 0.

Enfin, d'après le théorème précédent, la suite $((u_n - \ell)\ell')_n$ converge vers $0 \times \ell' = 0$.

On en déduit que la suite $(u_n v_n - \ell\ell')_n$ converge vers 0, ce qui prouve le théorème. □

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelles qui converge vers $\ell \neq 0$. Alors*
- *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait : $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$.*
- *La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq N}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.*

Preuve. En effet, si $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

En particulier, pour tout $n \geq N$, on a

$$|\ell| - |u_n| \leq ||\ell| - |u_n|| \leq |\ell - u_n| \leq \varepsilon = \frac{|\ell|}{2},$$

donc $|u_n| \geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$. Le premier point est prouvé.

En ce qui concerne le second point, on écrit que, pour $n \geq N$, on a $u_n \neq 0$. Donc, pour $n \geq N$, on a

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - u_n}{\ell u_n}.$$

La suite $(\ell - u_n)$ tend vers 0 et la suite $(\frac{1}{\ell u_n})_{n \geq N}$ est bornée. On en déduit que la suite $(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell})_{n \geq N}$ converge vers 0. □

Proposition. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels non nuls telle que $(|u_n|)_n$ converge vers $+\infty$. Alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ converge vers 0.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n| \geq \frac{1}{\varepsilon}$. On a alors :

$$\forall n \geq N, \qquad \left|\frac{1}{u_n}\right| \leq \varepsilon.$$

□

3 Passage à la limite et suites monotones.

Théorème de passage à la limite. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle qui converge vers* ℓ *telle que, pour tout* $n \geq 0$*, on ait* $u_n \geq 0$*. Alors* $\ell \geq 0$*.*

Preuve. Supposons que l'on ait $\ell < 0$. Posons $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$. Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon = \frac{\ell}{2} < 0$. Ceci contredit le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \geq 0$. $\square$

Théorème de convergence des suites croissantes majorées. *Soit* (u_n) *une suite de réels, croissante et majorée. Alors la suite* (u_n) *converge.*

Preuve. Posont $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. A est non vide, et comme $(u_n)_n$ est majorée, l'ensemble A est majoré. A possède donc une borne supérieure s.

Montrons que $(u_n)_n$ converge vers s.

Tout d'abord, s est majorant de A, donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq s$.

Si maintenant $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ n'est plus majorant de A, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > s - \varepsilon$.

La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N > s - \varepsilon$.

On a bien prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad s - \varepsilon < u_n \leq s.$$

Ceci prouve bien que $(u_n)_n$ converge vers s et achève la preuve du théorème. $\square$

Théorème des suites adjacentes. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de réels. On suppose que :*
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$
- $(u_n)_n$ *est croissante et* $(v_n)_n$ *est décroissante*
- $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Alors $(u_n)_n$ *et* (v_n) *convergent et ont même limite.*

Preuve. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq v_0$. La suite $(u_n)_n$ est donc croissante majorée donc convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n$. La suite $(v_n)_n$ est donc décroissante minorée donc convergente vers $\ell' \in \mathbb{R}$.

La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0 donc $\ell - \ell' = 0$, ce qui entraîne que $\ell = \ell'$. $\square$