Université de Provence — 2011-2012
Mathématiques générales — L1 - PEIP

Devoir Maison
Exponentielle complexe et résonnaces.

Exercice 1. Dérivée de l'exponentielle complexe.

Pour cet exercice, on fixe un $z \in \mathbb{C}$, que l'on notera aussi

$$z = x + iy.$$

On définit la fonction f d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{zt} \end{array}$$

1) Rappeler la définition de l'exponentielle d'un nombre complexe.

2) On pose $f_r(t) = Re(f(t))$ et $f_i(t) = Im(f(t))$. Donner les formules de $f_i(t)$ et $f_r(t)$ en fonction de x, y et t.

3) Dire pourquoi les fonctions f_r et f_i sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition. Donner leur dérivées.

4) On définit la dérivée de la fonction complexe f par

$$f'(t) = f_r'(t) + i\, f_i'(t).$$

Montrer qu'avec cette définition on a bien $f'(t) = z\, e^{zt} = z\, f(t)$.

Exercice 2. Résonnances d'un oscillateur harmonique forcé.

On appelle oscillateur harmonique de fréquence $\frac{\omega_0}{2\pi}$ un système physique qui, lorsqu'il est soumis à aucune force extérieure, a une grandeur caractéristique qui vérifie l'équation

$$y'' + \omega_0^2\, y = 0 \tag{1}$$

Par exemple, un ressort, un pendule (pour les petits angles) sont des oscillateurs harmoniques. Mais plus généralement, beaucoup de systèmes (un verre par exmeple) peuvent être vus commes des oscillateurs harmoniques en faisant quelques approximations.

1) Donner la forme générale des solutions de l'équation (1).

2) Donner plus particulièrement la solution qui vérifie
   a) $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
   b) $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
   c) $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Quand un oscillateur harmonique est forcé par une oscillation de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ (écrite $\cos(\omega t)$ ici), alors son équation devient

$$y'' + \omega_0^2\, y = \cos(\omega t) \tag{2}$$

3) On suppose $\omega \notin \{-\omega_0, \omega_0\}$.
a) Chercher une solution particulière sous la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.
b) Donner la forme générale des solutions de l'équation (2).
c) On note y_ω la solution qui vérifie $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. Donner son expression.
d) L'écrire sous la forme d'un produit de deux sinus.
e) Quand ω est proche de ω_0, utiliser la forme produit précédente pour dessiner (sans détails), la forme de cette solution y_ω.

4) On suppose maintenant que $\omega \in \{-\omega_0, \omega_0\}$.
a) Essayer de chercher une solution de la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Que se passe-t-il?
b) Chercher (et trouver) une solution particulière de la forme $y(t) = t[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$.
c) Donner la forme générale des solutions de l'équation (2).
d) On note y_{ω_0} la solution qui vérifie $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. Donner son expression.
e) Faire un dessin rapide de cette solution y_{ω_0}.

5) On cherche à comprendre ce qui se passe quand $\omega \to \omega_0$.
a) Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.
b) On choisit alors un temps t **fixé**. Montrer que

$$y_\omega(t) \underset{\omega\to\omega_0}{\longrightarrow} y_{\omega_0}(t).$$

c) Cela est-il compatible avec les graphiques que vous avez dessinés? Essayer de justifier vos réponses.

6) Dans les deux cas, quelle sera la solution avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ si on change le membre de droite de l'équation (2) (on supposera que $\omega \neq \pm\frac{\omega_0}{2}$)

$$y'' + \omega_0^2\, y = \cos(\omega t) + \cos(2\omega t)$$

7) Un verre - qui sera consideré ici comme un oscillateur harmonique de fréquence donné, est soumis à un signal sonore de même fréquence. Que risque-t-il de se passer?

Pour quelques illustrations du phénomène de résonance en physique, vous pouvez consulter : `http://lewebpedagogique.com/physique/quelques-videos-de-resonnances/`