Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

Devoir Maison : Calcul de la somme des $\frac{1}{k^2}$.

On se propose de calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},$$
en suivant un raisonnement original de Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand du début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2n+1)x = \operatorname{Im}(\cos x + i\sin x)^{2n+1}$.

En déduire que
$$\sin(2n+1)x = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k \sin^{2k+1}x\cos^{2n-2k}x.$$

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $\text{cotan}x = \frac{1}{\tan x}$.

Soit P_n le polynôme défini par
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{n-k}.$$

Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,
$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1}x} = P_n(\text{cotan}^2 x).$$

3. Montrez que les nombres $\text{cotan}^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$ pour $k = 1,\dots,n$ sont tous distincts et sont les racines de P_n.

4. Si un polynôme de degré n qui possède n racines distinctes s'écrit
$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0,$$
exprimez la somme de ses racines en fonction de a_n et a_{n-1}.

En déduire la valeur de
$$\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}.$$

5. Montrez que
$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \text{cotan}^2x \le \frac{1}{x^2} \le 1+\text{cotan}^2x.$$

6. En déduire un encadrement de
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

7. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$