Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

Devoir Maison

Logique, Ensembles, Fonctions

Exercice 1.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont vraies.

$$\begin{aligned}
&\forall m \in \mathbb{N}^*,\, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > m \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{m}\\
&\forall N \in \mathbb{N},\, \exists n \in \mathbb{N}, n > N \text{ et } (-1)^n < 1\\
&\exists N \in \mathbb{N}\,, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,01
\end{aligned}$$

2. Que dire de ces propriétés si on transforme les quantificateurs $\forall$ en $\exists$ et réciproquement ?
3. Les énoncés ci-dessous sont-ils vrais ou faux ? (On justifiera).

$$\begin{aligned}
&\exists x \in \mathbb{N},\, x^2 > 5\\
&\forall x \in \mathbb{N},\, x^2 > 5\\
&\forall x \in \mathbb{N},\, \exists y \in \mathbb{N},\, y > x^2\\
&\exists y \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{N},\, y > x^2\\
&\forall x \in \mathbb{R},\, \forall z \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R},\, x < y < z\\
&\forall x \in \mathbb{R},\, \forall z \in \mathbb{R},\, x < z \Rightarrow \big(\exists y \in \mathbb{R},\, x < y < z\big)\\
&\forall x \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R},\, x + y = 1\\
&\exists y \in \mathbb{R},\, \forall x \in \mathbb{R},\, x + y = 1\\
&\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N},\, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0\\
&\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N},\, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0
\end{aligned}$$

4. f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$. Écrire la négation des propositions ci-dessous.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\, \forall x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\\
&\forall y \in [0,1],\, \exists x \in \mathbb{R},\, y = f(x)\\
&\forall a \in \mathbb{Z},\, \forall b \in \mathbb{Z},\, \exists q \in \mathbb{Z},\, \exists r \in \mathbb{Z},\, a = qb + r \text{ et } 0 \leq r < b
\end{aligned}$$

Exercice 2. Dresser la liste des inclusions et des égalités entre les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x \leq 0\}, \qquad B = \{\frac{a}{b}\,;\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}^*,\, a \text{ pair }\}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C}\,;\, z^2 = -4\},$$
$$D = \{z \in \mathbb{R}\,;\, z^2 = -4\}, \qquad E = \mathbb{Q}, \qquad F = \emptyset, \qquad G = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^-, \qquad H = \{2n\,i\,;\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 3. Soient les fonctions

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x + 2 \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 4 \end{array} \right.$$

Calculer $f \circ g$, $g \circ f$ ainsi que la fonction

$$fg : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

Exercice 4. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction s par

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array} \right.$$

1. Exhiber une fonction paire mais pas impaire, puis une fonction impaire mais pas paire.
2. Existe-t-il des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires ?
3. Trouver toutes les fonctions qui sont à la fois paires et impaires.
4. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire ssi $f \circ s = f$.
5. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire ssi $f \circ s = s \circ f$.
6. Si f est une fonction quelconque, que dire des fonctions

$$x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \ ?$$

7. Montrer que toute fonction f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 5. Expliciter $f(]0,1[)$, $f([1,2[)$, $f([-3,-2])$, $f^{-1}(]0,1[)$, $f^{-1}([1,2[)$,$f^{-1}([-3,-1])$,$f^{-1}([-\frac{1}{2},3])$ pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes

$$1) \quad f : x \mapsto x^2 \qquad 2) \quad f : x \mapsto e^x \qquad 3) \quad f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \qquad 4) \quad f : x \mapsto \sin x$$