UNIVERSITÉ DE PROVENCE
2010-2011 Licence PEI 1

Correction du DM 1

Exercice 3
Calculer le module et l'argument des nombres complexes :

1. $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$
   On écrit $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$. On a $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   Donc le module de $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ est $\sqrt{2}$ et un argument est $\frac{\pi}{6}$.
   La forme polaire est $\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. $\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^{20}$

   On décompose $2+2i$ *et* $1-i$ *sous forme polaire.* C'est à dire :
   - $2+2i = 2(1+i) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
     (si vous le voyez pas directement commencez par calculer le module, puis l'argument).
   - $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

   D'où

$$\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}}\right)^{20} = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}-(-i\frac{\pi}{4})}\right)^{20} = 2^{20}(e^{i\frac{\pi}{2}})^{20} = 2^{20}e^{i10\pi} = 2^{20}$$

   10π est égal à 0 modulo 2π, donc un argument de ce nombre est 0 et son module 2^{20}. Et donc la forme cartésienne est 2^{20}.

3. $\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$

   On met sous forme polaire le nombre $1-i\sqrt{3}$.
   On a $1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Ce qui donne

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-2}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = -e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(-\pi+\frac{\pi}{3})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

   Le module est donc 1 et un argument $-\frac{2\pi}{3}$. La forme cartésienne est $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 11
Résoudre $(z-i)^5 = (z+i)^5$ **:**

On remarque que si $z=-i$ alors $(z-i)^5 = (-2i)^5$ et $(z+i)^5 = 0$ donc $z=-i$ n'est pas solution de l'équation $(z-i)^5 = (z+i)^5$.

L'équation $(z-i)^5 = (z+i)^5$ est équivalente à

$$\frac{(z-i)^5}{(z+i)^5} = 1 \tag{1}$$

Posons $Z = \frac{z-i}{z+i}$. L'équation (1) devient donc $Z^5 = 1$. Cette équation a pour solutions les racines cinquièmes de l'unité. Elle a cinq racines distinctes dans $\mathbb{C}$ car elle est de degré 5. Ces racines sont

$$\begin{cases} z_0 &= 1 \\ z_1 &= e^{i\frac{2\pi}{5}} \\ z_2 &= e^{i\frac{4\pi}{5}} \\ z_3 &= e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}-2i\pi} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} \\ z_4 &= e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{8\pi}{5}-2i\pi} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} \end{cases} \tag{2}$$

Remarque : Une équation polynômiale à coefficients réels qui a une racine complexe u a toujours aussi son conjugué $\overline{u}$ comme racine. Démontrez-le ! !

On résout maintenant notre équation de départ en posant

1. $Z_0 = \frac{z_0-i}{z_0+i}$ d'où $1 = \frac{1-i}{1+i}$. Cette équation n'a pas de solution puisque $1+i \neq 1-i$. Donc Z_0 n'existe pas.
2. $Z_1 = \frac{z_1-i}{z_1+i}$ ce qui donne $e^{i\frac{2\pi}{5}} = \frac{z_1-i}{z_1+i}$. On a donc

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi}{5}} &= \frac{z_1-i}{z_1+i} \\ (z_1+i)e^{i\frac{2\pi}{5}} &= z_1 - i \\ z_1(e^{i\frac{2\pi}{5}}-1) &= -ie^{i\frac{2\pi}{5}} - i \\ z_1 &= -i\frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{5}}\left(e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{5}}\left(e^{i\frac{\pi}{5}}-e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \end{aligned} \tag{4}$$

Donc, en remplaçant dans (3), on a

$$\begin{aligned} z_1 = -i\frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1} &= -i\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \\ = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} &= \frac{1}{\tan(-\frac{\pi}{5})} = cotan\left(-\frac{\pi}{5}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Le même calcul entraine que l'on obtient

3. $z_2 = cotan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$

4. $z_3 = cotan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
5. $z_4 = cotan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Enfin on a obtenu 4 solutions. Y en a-t-il d'autres ? Il nous faut revenir à l'équation originale. On remarque que l'on peut écrire

$$(z-i)^5 = (z+i)^5 \Leftrightarrow (z-i)^5 - (z+i)^5 = 0 \tag{6}$$

Or si on développe les polynômes $(z-i)^5$ et $(z+i)^5$ qui sont tous les deux de degré 5, le terme de degré 5 est justement z^5 dans les deux cas. Il va donc se simplifier.

Pour montrer que le polynôme P est de degré 4, il faudrait pour être parfaitement rigoureux développer $(z-i)^5 - (z+i)^5$ en utilisant pour chacun des termes le binôme de Newton. Faites le en exercice !!

Donc le polynôme $P(z) = (z-i)^5 - (z+i)^5$ est en fait de degré 4.

Il y a donc 4 solutions exactement à l'équation $P(z) = 0$, donc à notre équation.

IMPORTANT : une équation polynômiale dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$, où P est de degré n, a exactement n racines (en comptant les multiplicités).

Exercice 20 :

Comme $\frac{d-a}{b-c}$ est imaginaire pur on a

$$\frac{d-a}{b-c} = -\overline{\left(\frac{d-a}{b-c}\right)} = -\frac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{c}} \tag{7}$$

Donc

$$\begin{aligned}(d-a)(\overline{b}-\overline{c}) &= -(b-c)(\overline{d}-\overline{a})\\ d\overline{b} - d\overline{c} - a\overline{b} + a\overline{c} &= -b\overline{d} + b\overline{a} + c\overline{d} - c\overline{a}\end{aligned} \tag{8}$$

De même, comme $\frac{d-b}{a-c}$ est imaginaire pur on a

$$\frac{d-b}{a-c} = -\overline{\left(\frac{d-b}{a-c}\right)} = -\frac{\overline{d}-\overline{b}}{\overline{a}-\overline{c}} \tag{9}$$

Donc

$$\begin{aligned}(d-b)(\overline{a}-\overline{c}) &= -(a-c)(\overline{d}-\overline{b})\\ d\overline{a} - d\overline{c} - b\overline{a} + b\overline{c} &= -a\overline{d} + a\overline{b} + c\overline{d} - c\overline{b}\end{aligned} \tag{10}$$

On remarque qu'on a des termes communs dans (8) et (10). On soustrait les équations deux à deux, il reste, en simplifiant à chaque ligne tout ce qu'on peut

$$\begin{aligned}d\overline{b} - d\overline{c} - a\overline{b} + a\overline{c} - (d\overline{a} - d\overline{c} - b\overline{a} + b\overline{c}) &= -b\overline{d} + b\overline{a} + c\overline{d} - c\overline{a}\\ &\quad - (-a\overline{d} + a\overline{b} + c\overline{d} - c\overline{b})\\ d\overline{b} - a\overline{b} + a\overline{c} - d\overline{a} + b\overline{a} - b\overline{c} &= -b\overline{d} + b\overline{a} - c\overline{a} + a\overline{d} - a\overline{b} + c\overline{b}\\ d\overline{b} + a\overline{c} - d\overline{a} - b\overline{c} &= -b\overline{d} - c\overline{a} + a\overline{d} + c\overline{b}\end{aligned} \tag{11}$$

On cherche alors à factoriser ce qu'on peut dans la dernière ligne de ce qui précède

$$\begin{aligned}
d\overline{b} + a\overline{c} - d\overline{a} - b\overline{c} &= -b\overline{d} - c\overline{a} + a\overline{d} + c\overline{b} \\
d(\overline{b} - \overline{a}) + \overline{c}(a - b) &= \overline{d}(a - b) + c(\overline{b} - \overline{a}) \\
d(\overline{b} - \overline{a}) - c(\overline{b} - \overline{a}) &= \overline{d}(a - b) - \overline{c}(a - b) \\
(d - c)(\overline{b} - \overline{a}) &= (a - b)(\overline{d} - \overline{c}) \\
\frac{d - c}{a - b} &= \frac{\overline{d} - \overline{c}}{\overline{b} - \overline{a}} \\
\frac{d - c}{a - b} &= -\frac{\overline{d} - \overline{c}}{\overline{a} - \overline{b}} = -\overline{\left(\frac{d - c}{a - b}\right)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Donc le nombre $\frac{d-c}{a-b}$ a une partie réelle nulle, donc il est imaginaire pur.

Pour l'interprétation géométrique, il suffit de faire un dessin ! En effet le fait que $\frac{d-a}{b-c}$ est imaginaire pur donne que les droites (AB) et (DC) sont orthogonales. De même le fait que $\frac{d-b}{a-c}$ est imaginaire pur donne le fait que (DB) et (AC) sont orthogonales.

Ainsi si on considère le triangle ABC le point D est à la fois sur les hauteurs issues de AB et de AC, donc c'est l'orthocentre du triangle. Donc (AD) est aussi orthogonale à (BC).