UNIVERSITÉ DE PROVENCE 2011-2012
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES L1 - PEIP

Correction (rapide) du Devoir Maison
Exponentielle complexe et résonnaces.

Exercice 1. Dérivée de l'exponentielle complexe.

Pour cet exercice, on fixe un $z \in \mathbb{C}$, que l'on notera aussi

$$z = x + iy.$$

On définit la fonction f d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{zt} \end{array}$$

1) Si $z = x + iy$, alors $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

2) On pose $f_r(t) = e^{xt}\cos(yt)$ et $f_i(t) = e^{xt}\sin(yt)$.

3) Ces fonctions sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produits des fonctions continues et dérivables exponentielles, cosinus et sinus, définies sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_r'(t) &= e^{xt}[x\cos(yt) - y\sin(yt)] \\ f_i'(t) &= e^{xt}[x\sin(yt) + y\cos(yt)] \end{aligned}$$

4) On définit la dérivée de la fonction complexe f par

$$\begin{aligned} f'(t) &= f_r'(t) + i\, f_i'(t) \\ &= e^{xt}[x\cos(yt) - y\sin(yt)] + ie^{xt}[x\sin(yt) + y\cos(yt)] \\ &= e^{xt}\big[(x+iy)\cos(yt) + (ix - y)\sin(yt)\big] \\ &= e^{xt}\big[(x+iy)\cos(yt) + i(x+iy)\sin(yt)\big] \\ &= e^{xt}[\cos(yt) + i\sin(yt)](x+iy) \\ &= ze^{zt} \end{aligned}$$

Exercice 2. Résonnances d'un oscillateur harmonique forcé.

1) Le polynôme associé est $X^2 + \omega_0^2 = (X - i\omega_0)(X + i\omega_0)$ qui admet les deux racines imaginaires pures $i\omega_0$ et $-i\omega_0$. Les solutions de l'équation sont donc de la forme

$$A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

2)
a) On obtient le système $A = 1, B = 0$, ce qui donne la solution $y(t) = \cos(\omega_0 t)$.
b) On obtient le système $A = 0, B = 1$, ce qui donne la solution $y(t) = \sin(\omega_0 t)$.
c) On obtient le système $A = 0, B = 0$, ce qui donne la solution $y(t) = 0$.

Quand un oscillateur harmonique est forcé par une oscillation de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ (écrite $\cos(\omega t)$ ici), alors son équation devient

$$y'' + \omega_0^2\, y = \cos(\omega t) \tag{1}$$

3) On suppose $\omega \notin \{-\omega_0, \omega_0\}$.

a) En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} y'(t) &= \omega[-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)] \\ y''(t) &= \omega^2[-A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)] \\ y''(t) + \omega_0^2 y(t) &= (\omega_0^2 - \omega^2)[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] \end{aligned}$$

Une fonction de cette forme sera donc solution si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left[A(\omega_0^2 - \omega^2) - 1\right]\cos(\omega t) + B(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) = 0.$$

Ceci ne peut-être vérifié pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) - 1 = 0 \\ B(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

Comme $\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$, on en déduit que $A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ et $B = 0$. Ce qui donne la solution "particulière"

$$y_p(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

b) Les solutions sont de la forme "solution particulière + solutions de l'équation homogène associée". On obtient don la famille

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

c) Pour trouver y_ω, il faut déterminer les constantes A, B dans la forme ci-dessus. En dérivant, on obtient

$$-\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t) - A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t).$$

Cette solution vérifie $y(0) = 0$ ssi $A + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0$. Elle vérifie $y'(0) = 0$ ssi $B = 0$. On obtient donc la solution

$$y_\omega(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$$

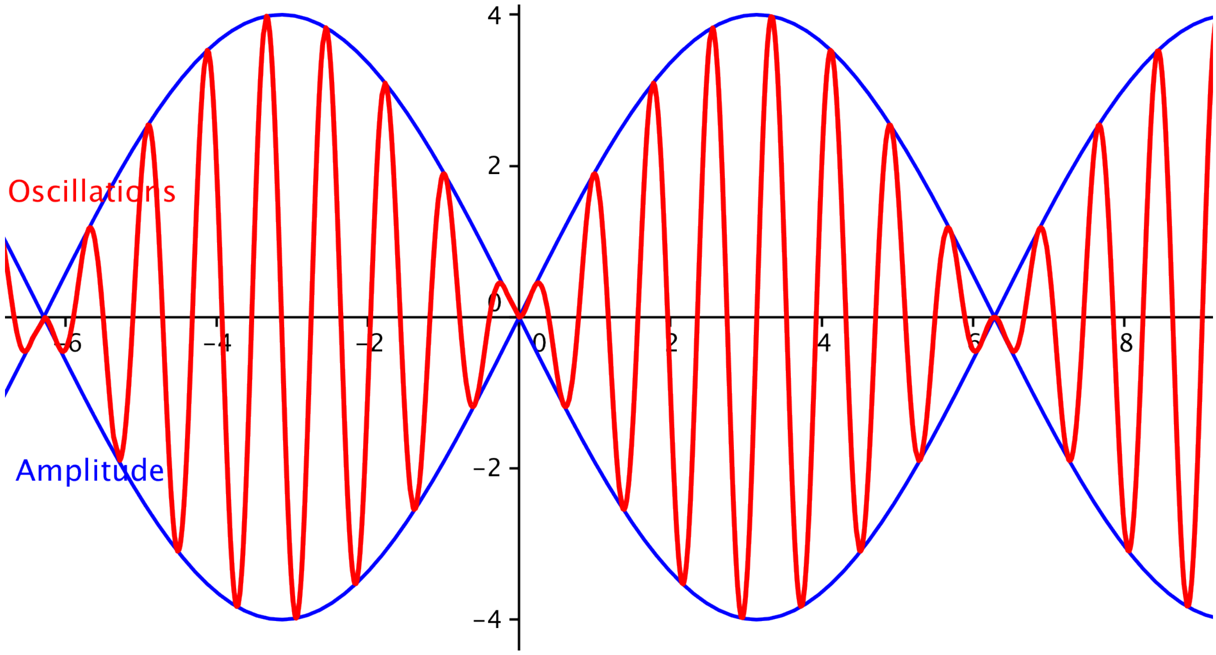
d) On utilise la formule $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ qui devient ici

$$y_\omega(t) = -\frac{2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)$$

e) Quand ω est proche de ω_0, le premier sinus a une fréquence $\frac{\omega+\omega_0}{4\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi}$ et le second une fréquence $\frac{\omega-\omega_0}{4\pi}$ très petite par rapport au premier. Le second sinus varie donc très lentement et on peut considérer qu'on a un sinus de fréquence $\frac{\omega_0}{2\pi}$ et d'amplitude $-\frac{2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)$.

$$y_\omega(t) = \underbrace{-\frac{2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)}_{\textit{Amplitude}}\underbrace{\sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right)}_{\textit{Oscillations}}$$

Pour le dessiner, on dessine d'abord la courbe de l'amplitude (et son opposée) en bleue sur le dessin, et ensuite on fait des oscillations de fréquence $\frac{\omega_0}{2\pi}$ a l'intérieur de ces deux courbes bleues.



4) On suppose maintenant que $\omega \in \{-\omega_0, \omega_0\}$.

a) Quand on essaie, on retombe sur le même système qu'à la question précédente, à savoir

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) - 1 = 0 \\ B(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \end{cases},$$

mais cette fois-ci, $\omega_0^2 - \omega^2 = 0$ donc ce système n'admet plus de solutions. C'est normale car ici, les fonctions du type $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ sont déjà les solutions de l'équation homogène associée.

b) En dérivant, et en utilisant $\omega^2 = \omega_0^2$, on obtient

$$\begin{aligned} y'(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \omega t[-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)] \\ y''(t) &= 2\omega[-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)] - \omega^2 t[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] \\ y''(t) + \omega_0^2 y(t) &= 2\omega[-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)]. \end{aligned}$$

Et y est solution de l'équation ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -2\omega A\sin(\omega t) + (2\omega B - 1)\cos(\omega t)] = 0$$

Ceci n'est possible pour tout $t \in \mathbb{R}$ que si $A = 0$ et $B = \frac{1}{2\omega}$. On obtient donc la solution particulière

$$y_p(t) = \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$$

c) Pour obtenir toutes les équations, il suffit d'ajouter les solutions de l'équation homogène associée à cette solution particulière. On obtient la famille

$$\frac{t}{2\omega}\sin(\omega t) + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

d) Si y est de la forme ci-dessus, on obtient en dérivant

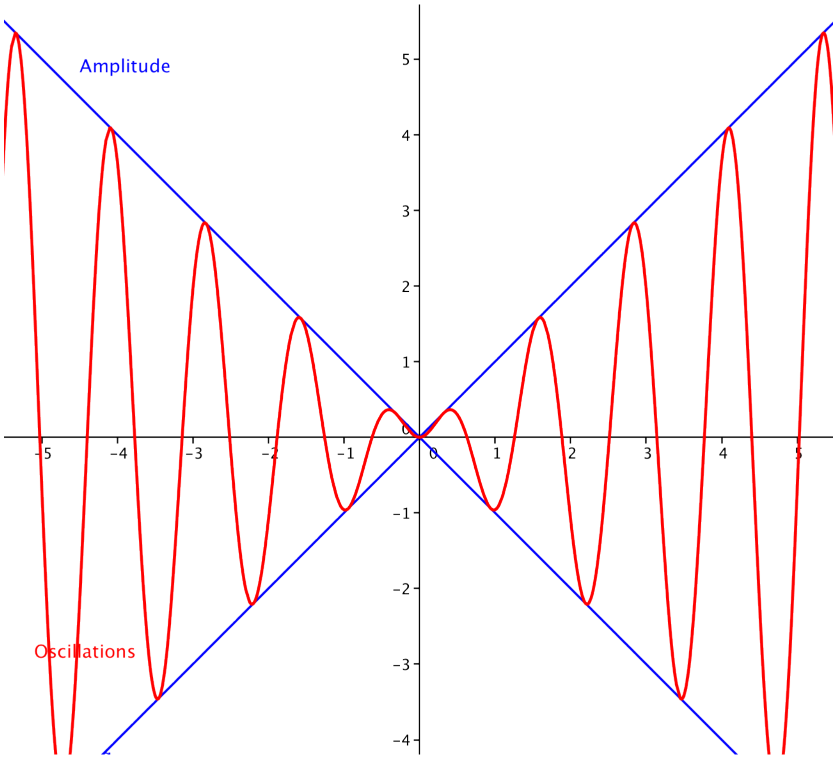
$$y'(t) = \frac{1}{2\omega}\sin(\omega t) + \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t) + \omega_0[-A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)].$$

Ensuite, $y(0) = 0$ ssi $A = 0$. Et $y'(0) = 0$ ssi $\omega_0 B = 0$. La solution recherchée est donc

$$y_\omega(t) = \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$$

e) On peut aussi décomposer la solution sous la forme amplitude et un sinus oscillant.

$$y_\omega(t) = \underbrace{\frac{t}{2\omega}}_{Amplitude} \underbrace{\sin(\omega t)}_{Oscillations}$$



5) a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) On a $y_{\omega_0}(t) = \frac{t}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t)$. La convergence de la partie oscillante de y_ω vers y_{ω_0} est vraie car

$$\sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\right) \underset{\omega\to\omega_0}{\longrightarrow} \sin(\omega_0 t).$$

Pour les amplitudes, il faut utiliser la question précédente. En effet, on peut réécrire

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right) &= \frac{2}{(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right) \\ &= \underbrace{\frac{t}{(\omega+\omega_0)}}_{\to\frac{t}{2\omega_0}} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)}{\frac{\omega-\omega_0}{2}t}}_{\to 1} \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right) \underset{\omega\to\omega_0}{\longrightarrow} \frac{t}{2\omega_0},$$

ou l'on a utilisé le a) pour le deuxième terme puisque $\frac{\omega-\omega_0}{2}t \to 0$ quand $\omega \to \omega_0$. En multipliant les deux limites précédentes, on en déduit que

$$y_\omega(t) \underset{\omega\to\omega_0}{\longrightarrow} y_{\omega_0}(t).$$

c) Oui, car dans le cas où ω se rapproche de ω_0, alors la fréquence de y_ω devient de plus en plus petite, et son amplitude augmente. Et sur notre graphique, si ω est trop proche de ω_0, on ne voit plus que le début d'une oscillation de l'amplitude, qui ressemble beaucoup à une fonction affine du type de $\frac{t}{2\omega_0}$.

6) Dans le cas $\omega \neq \pm\omega_0$, la solution de $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$ est

$$y_1(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t).$$

Comme $2\omega \neq \pm\omega_0$, la solution de $y'' + \omega_0^2 y = \cos(2\omega t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$ est

$$y_2(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \cos(2\omega t).$$

Additionnons ces deux solutions pour obtenir $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Alors $y_3(0) = 0 + 0 = 0$ et $y_3'(t) = 0 + 0 = 0$. ensuite, par le principe de superposition des solutions

$$y_3''(t) + y_3(t) = [y_1''(t) + y_1(t)] + [y_2''(t) + y_2(t)] = \cos(\omega t) + \cos(2\omega t).$$

y_3 vérifie l'équation et les conditions initiales, donc c'est la solution recherchée

$$y_3(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \cos(2\omega t)$$

Pour le cas $\omega \neq \pm\omega_0$, on peut faire le même raisonnement, mais cette fois-ci la solution y_1 est

$$y_1(t) = \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t).$$

y_2 reste inchangée et on obtient au final la solution

$$y_3(t) = \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \cos(2\omega t).$$

7) Le verre va se mettre à osciller de plus en plus fortement comme sur le second dessin. Si le signal sonore dure suffisamment longtemps, il risque de se briser.