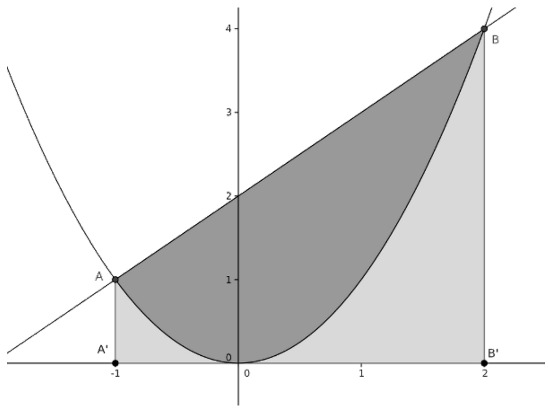
UNIVERSITÉ DE PROVENCE 2010-2011

Licence PEI 1

Devoir Maison

Calcul de l'aire entre une corde et une parabole

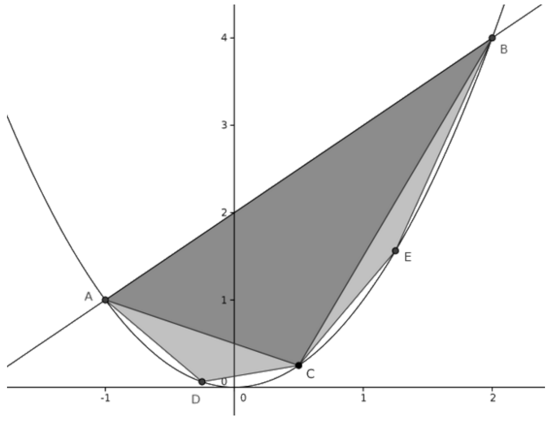
Exercice 1 (Un calcul d'aire du à Archimède.) Dans cet exercice on cherche à calculer l'aire entre une corde et une parabole (voir dessin ci-dessous).



Pour simplifier les calculs, on va s'intéresser uniquement à la parabole $x \mapsto x^2$. On note A le point de gauche, de coordonnées (a, a^2), et B le point de droite d'abscisse b (et d'ordonnée ?). On note aussi A' le point de coordonnées $(a, 0)$ et B' de coordonnées $(b, 0)$.

1. Faire un dessin soigné (et assez grand car vous allez rajouter des points plus tard).
2. Calculer l'aire du trapèze $AA'B'B$ *(Sans connaître la formule, on peut chercher un rectangle qui aura la même aire que le trapèze).*
3. Avec la notion de primitive, il est facile de calculer l'aire (en gris clair) sous la parabole entre A' et B'. Combien mesure-t-elle ? En déduire l'aire (en gris foncé) de la partie située entre le segment $[AB]$ et la parabole.

Malheureusement pour lui, Archimède, mathématicien grec du III$^{\text{ème}}$ siècle av-JC ne connaissait pas la notion d'intégrale (introduite au XVII$^{\text{ème}}$ siècle par Leibniz). Pour calculer l'aire entre la corde et la parabole, il a utilisé la méthode suivante. Il introduit le point C situé sur la parabole et d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ (voir figure ci-dessous). Il calcule l'aire du triangle ABC, puis ajoute celle des 2 triangles plus clairs construits avec les points de la parabole D d'abscisse $\frac{3a+b}{4}$ et E d'abscisse $\frac{a+3b}{4}$ et ainsi de suite...



4. Placer les nouveaux points sur votre dessin.
5. Montrer que l'aire S_0 du triangle ABC vaut $\frac{(b-a)^3}{8}$. *(On pourra soustraire à l'aire du grand trapèze déjà calculée celle de deux trapèzes plus petits).*
6. Montrer que l'aire de chacun des deux petits triangles vaut $\frac{1}{8}^{\text{ème}}$ de celle du grand triangle. en déduire l'aire S_1 de la réunion des 3 triangles.
7. On continue la construction commencée ci-dessus. On ajoute l'aire des 4 triangles construit dans les espaces restant pour obtenir l'aire S_2. Calculer S_2. Ensuite, il faut ajouter l'aire de 8 triangles pour obtenir une aire S_3 (valeur ?). Quand on a ajouté n fois des triangles, on note S_n l'aire des $1+2+4+\ldots+2^n$ triangles obtenus. Calculer S_n.
8. En déduire l'aire entre la corde et la parabole, notée S.

En fait, Archimède ne connaissait pas non plus la notion de limite, introduite au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, et ne pouvait donc pas calculer la limite S de la question 8. Mais il connaissait les *Éléments d'Euclide* (titre d'un manuel fort prisé de l'un des meilleurs mathématiciens de son époque) qui contenaient la propriété suivante :

> *Étant données deux grandeurs inégales, si de la plus grande on retranche plus de la moitié, et que du reste on retranche plus de la moitié et si l'on continue toujours ainsi, nous aboutirons à une grandeur inférieure à la plus petite des grandeurs donnée.*

En langage moderne, on dirait que

> *Si une suite réelle positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $u_{n+1} < \dfrac{u_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

9. Expliquer pourquoi les deux énoncés sont équivalents (les grecs de cette époque ne connaissent ni les nombres négatifs ni le zéro, donc grandeur signifie pour eux un réel strictement positif).
10. Démontrer la propriété traduite en langage moderne.
11. Calculer la pente de la corde $[AB]$ et celle de la tangente en C à la parabole.
12. En vous aidant du dessin ci-dessous, montrer que la suite $u_n = S - S_n$ vérifie cette propriété et conclure *(Pour être précis, il faudra utiliser les résultats de la question précédente).*