Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales I

PLANCHE 1

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. Mettre sous forme cartésienne (forme $a+ib$ avec a et b dans $\mathbb{R}$) les nombres complexes suivants

$$\frac{3+2i}{1-i},\frac{1+2i}{1-2i},\ \frac{2+5i}{1-i},\ \frac{2-5i}{1+i},\frac{1}{(1+2i)(3-i)}$$

Exercice 2. Soit α un nombre complexe différent de 0. Quel est le module de $\alpha/\bar{\alpha}$?

Exercice 3. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants

$$1+i,\ 1+i\sqrt{3},\ \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i},\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2},\ \left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^{20},\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$$

En déduire leur forme cartésienne.

Exercice 4. Soient $a=2\sqrt{6}(1+i)$ et $b=\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$. Déterminer les formes polaires de a et b. Déterminer les formes cartésiennes et polaires du nombre complexe $\frac{a}{b}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

Exercice 5. Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $-1+e^{2i\theta}=e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}(e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}+e^{-i(\theta-\frac{\pi}{2})})$. En déduire le module et l'argument de $-1+\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$ en discutant selon les valeurs de θ.
2. De même mettre $1+e^{i\theta}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{2i\theta}$ sous forme ue^{iv} où u et v sont des nombres réels. En déduire leurs modules et arguments en discutant selon les valeurs de θ.
3. Soient α et β deux nombres réels. Mettre $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ sous la forme ue^{iv} où u et v sont des nombres réels.

Exercice 6. (*) Soient deux nombres complexes z et z' de module 1. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est un nombre réel.

Exercice 7. Chacune des formules suivantes est fausse. Déterminer pourquoi sans développer les calculs :

$$e^{\frac{2i\pi}{7}}e^{-\frac{3i\pi}{4}} = 1-\tfrac{1}{2}i \tag{1}$$
$$(1+i)(1-i) = 0 \tag{2}$$
$$(1+i)(1-i) = 1 \tag{3}$$
$$z^2+z+2 = (z-1-i)(z+2-i). \tag{4}$$

Exercice 8. Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer la forme polaire de $(1+i)^n$. Pour quelles valeurs de n, $(1+i)^n$ est-il un nombre réel ?

Exercice 9. Écrire, sous forme polaire, les deux nombres complexes $z_1 = 1 - i, \qquad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

Exprimer z_1^n et z_2^n pour tout entier $n \geq 1$ (sous forme polaire).

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ et $z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

Exercice 10.

1. Déterminer (sous la forme polaire) les trois complexes z_0, z_1, z_2 qui sont solutions de l'équation $z^3 = 1$, puis placer les points d'affixe z_0, z_1, z_2 dans un repère orthonormé du plan.

2. Exprimer z_0, z_1 et z_2 en fonction de $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

3. Calculer z_0^2, z_1^2, z_2^2 ainsi que z_0z_1, z_0z_2, et z_1z_2. Commenter.

4. Calculer la valeur de $z_0 + z_1 + z_2$.

5. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ j^k et $\sum\limits_{p=0}^{k} j^p = 1 + j + j^2 + ... j^k$.

6. Soit z tel que $z^n = 1$. Montrer qu'on a n solutions $z_0, ... z_{n-1}$ à cette équation et donner leurs valeurs en fonction de n. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 + z_1 + ... z_{n-1}$. Qu'en est-il des produits z_iz_j avec i et j dans $\{0, ..., n-1\}$?

   On dit que l'ensemble $\{z_0, z_1, ... z_{n-1}\}$ est stable pour la multiplication.

Exercice 11. Résoudre $(z - i)^5 = (z + i)^5$. Quel est le nombre de solutions ?

Exercice 12. Trouver les racines carrées de $3 - 4i$, $24 - 10i$, $5 + 12i$.

Exercice 13. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$. Comment feriez vous pour calculer $\cos(\pi/16)$ et $\sin(\pi/16)$?

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

1. $z^2 + z - 2 = 0$.

2. $4iz^2 + 2(1 + 6i)z + 2(-1 + 7i) = 0$

3. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$

4. $z^4 - (1 - i)z^2 - i = 0$

Exercice 15. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition:

$$|z - 4| = |z + 2i|.$$

Exercice 16. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition:

$$z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R} \ .$$

Exercice 17.

1. Définir au moyen de nombres complexes la rotation de centre $2+3i$ et d'angle $\pi/3$
2. Définir au moyen de nombres complexes la similitude de centre z_0, d'angle α et de rapport $a \neq 0$.
3. Définir au moyen des nombres complexes les symétries par rapport aux deux axes de coordonnées.
4. Soit z un nombre complexe, que peut-on dire des points d'affixe z et $-i\,\overline{z}$ dans un repère orthonormé du plan?

Exercice 18. Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que z, $1/z$, et $z-1$ aient le même module.

Exercice 19. Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes. Montrer que $\Re e(z) = |z|$ si et seulement si z est un nombre réel positif ou nul.

Montrer que $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\big(z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ ou $\mathrm{Arg}(z_1)=\mathrm{Arg}(z_2)\big)$.

Exercice 20. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes deux à deux distincts. Montrez que si $\frac{d-a}{b-c}$ et $\frac{d-b}{a-c}$ sont imaginaires purs, il en est de même de $\frac{d-c}{a-b}$. Comment peut-on interpréter cela géométriquement?

Exercice 21.

1. Comment choisir le nombre complexe z pour que $Z = z^2 + 2z - 3$ soit réel ? Soit E l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que Z soit réel. Déterminer E.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives i et 1. Soit M un point du plan d'affixe z distinct de A. On pose $Z = \frac{1-z}{i-z}$.

   Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel, et l'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 22. Soient a et b dans $\mathbb{Z}$. On suppose que a et b sont la somme de deux carrés, c'est à dire il existe x et y dans $\mathbb{Z}$ tels que $a = x^2 + y^2$ et z et t tels que $b = z^2 + t^2$.
Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrés. *On dit que le sous ensemble des éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont la somme de deux carrés est stable pour la multiplication.*
Indication: voir a et b comme les modules de nombres complexes qu'on précisera.