Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

Parcours PEIP

Planche 1 Nombres complexes

corrigé partiel

Exercice 6.

On considère deux nombres complexes z et z' de module 1. Sous forme polaire, ils s'écrivent donc $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$ avec $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Mais alors, puisque pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$, on a

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\overline{e^{i\theta}} + \overline{e^{i\theta'}}}{1+\overline{e^{i\theta}e^{i\theta'}}} = \frac{e^{-i\theta}+e^{-i\theta'}}{1+e^{-i\theta}e^{-i\theta'}},$$

ce qui, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{i\theta}e^{i\theta'}$ donne

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{e^{-i\theta}e^{i\theta}e^{i\theta'} + e^{-i\theta'}e^{i\theta}e^{i\theta'}}{e^{i\theta}e^{i\theta} + e^{-i\theta}e^{-i\theta'}e^{i\theta}e^{i\theta'}} = \frac{e^{i\theta'}+e^{i\theta}}{e^{i\theta}e^{i\theta'}+1} = \frac{z+z'}{1+zz'}.$$

Au final, $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est son propre conjugué, c'est donc un nombre réel.

Exercice 14.

3. On commence par poser $Z = \frac{z+i}{z-i}$. On a alors $Z^3+Z^2+Z+1 = 0$. Or $Z^3+Z^2+Z+1 = (Z+1)Z^2+(Z+1) = (Z+1)(Z^2+1)$. Les solutions possibles pour Z sont donc -1, i et $-i$. On traite maintenant chaque solution au cas par cas.

i) $Z = \frac{z+i}{z-i} = -1$: cela donne $z+i = i-z$ et donc $z = 0$;
ii) $Z = \frac{z+i}{z-i} = i$: cela donne $z+i = iz+1$ et donc $z = 1$;
iii) $Z = \frac{z+i}{z-i} = -i$: cela donne $z+i = -iz-1$ et donc $z = -1$.

Réciproquement, un calcul direct montre que 0, 1 et -1 sont bien solutions de l'équation.

4. Cette fois, on pose $Z = z^2$. On a alors $Z^2-(1-i)Z-i = 0$ dont 1 est solution évidente. Le terme constant d'un polynôme étant égal au produit de ses racines, la seconde solution est donc $-i$. Au final, on a donc $z^2 = 1$ ou $z^2 = -i$. Dans le premier cas, on a $z = \pm 1$ et dans le second, l'expérience ou un calcul de racine donne $z = \pm\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$.

Réciproquement, un calcul direct montre que 1, -1, $\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$ sont bien solutions de l'équation.

Exercice 16.

Remarquons d'abord que, puisqu'on divise par z, z est nécessairement non nul.

Dire que $z+\frac{4}{z}$ est réel, cela revient à dire que $\overline{z+\frac{4}{z}} = z+\frac{4}{z}$. En multipliant chaque membre par $z\overline{z} \neq 0$, on obtient $|z|^2\overline{z}+4z = |z|^2z+4\overline{z}$ ou encore $(z-\overline{z})(|z|^2-4) = 2.\mathfrak{Im}(z)(|z|^2-2) = 0$. Un point a donc un affixe z tel que $z+\frac{4}{z}$ soit réel si et seulement s'il est sur la droite réelle privé de l'origine ou bien sur le cercle de rayon 2 centré en l'origine.

Exercice 19.

Si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, alors $|z| = \mathfrak{Re}(z)$ si et seulement si $z = 0 \in \mathbb{R}^+$. Sinon, on a

$$|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}^2(z) + \mathfrak{Im}^2(z)} = |\mathfrak{Re}(z)|\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{Im}^2(z)}{\mathfrak{Re}^2(z)}} \geq |\mathfrak{Re}(z)|. \tag{1}$$

Or, on a toujours $\mathfrak{Re}(z) \leq |\mathfrak{Re}(z)|$, donc si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$, on a alors $|\mathfrak{Re}(z)| = \mathfrak{Re}(z) = z$. Cela implique, d'une part, que $\mathfrak{Re}(z)$ soit positif et, d'autre part, que l'inégalité dans (1) soit une égalité, c'est à dire que $\mathfrak{Im}(z) = 0$. En résumé, si $\mathfrak{Re}(z) = |z|$, alors z est un réel positif.

La réciproque est évidente.

D'après le théorème de l'inégalité triangulaire, on a $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^+$. Si l'un des deux nombres complexes est nul, c'est clairement vérifié. Sinon, on écrit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ sous forme polaire. On a alors $z_1\overline{z_2} = r_1 e^{i\theta_1}.r_2 e^{-i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \in \mathbb{R}^+$ si et seulement si $\theta_1 - \theta_2$ est un multiple de 2π, autrement dit si z_1 et z_2 ont le même argument.

Exercice 20.

Si $\frac{d-a}{b-c}$ est imaginaire pur, alors $\frac{\overline{d}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{c}} = -\frac{d-a}{b-c} = \frac{a-d}{b-c}$. En réduisant au même dénominateur, en développant et en regroupant les termes par signe, on obtient

$$a\overline{c} + \overline{a}c + b\overline{d} + \overline{b}d = a\overline{b} + \overline{a}b + c\overline{d} + \overline{c}d. \tag{2}$$

De même, si $\frac{d-b}{a-c}$ est imaginaire pur, alors

$$a\overline{b} + \overline{a}b + c\overline{d} + \overline{c}d = a\overline{d} + \overline{a}d + b\overline{c} + \overline{b}c. \tag{3}$$

En combinant les égalités (2) et (3), on obtient

$$a\overline{c} + \overline{a}c + b\overline{d} + \overline{b}d = a\overline{d} + \overline{a}d + b\overline{c} + \overline{b}c,$$

ce qui, en factorisant convenablement, donne $(\overline{d} - \overline{c})(a - b) = (c - d)(\overline{a} - \overline{b})$ ou encore, $a - b$ étant non nul, $\overline{\frac{d-c}{a-b}} = -\frac{d-c}{a-b}$. On en déduit que $\frac{d-c}{a-b}$ est imaginaire pur.

Géométriquement parlant, si on note A le point d'affixe a, B le point d'affixe b, C le point d'affixe c et D le point d'affixe d, les nombres complexes $d - a$ et $b - c$ correspondent, respectivement, aux vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$. De plus, l'argument de $\frac{d-a}{b-c}$ est égal à la différence des arguments de $d - a$ et $b - c$, c'est à dire à la différence d'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$. Donc si $\frac{d-a}{b-c}$ est un imaginaire pur, cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux et donc que D est sur la perpendiculaire à (BC) passant par A, c'est à dire sur la hauteur issue de A du triangle ABC.

De même, $\frac{d-b}{a-c}$ (respectivement $\frac{d-c}{a-b}$) est un imaginaire pur, si et seulement si D est sur la hauteur issue de B (respectivement C) de ce même triangle ABC.

Au final, le résultat de cet exercice dit que si un point est sur les hauteurs issues de deux sommets d'un triangle, alors il est également sur la troisième hauteur. Autrement dit, les trois hauteurs d'un triangle sont soit toutes parallèles, soit concourantes.

Exercice 22.

On pose $A = x + iy$ et $B = z + it$. On a alors $|A|^2 = a$ et $|B|^2 = b$. Mais alors $|AB|^2 = ab$ avec $|AB|^2 = |(x+iy)(z+it)|^2 = |(xz-yt)+i(xt+yz)|^2$. Au final, on a donc $ab = (xz-yt)^2+(xt+yz)^2$ somme de deux carrés.