Université de Provence	2010–2011

Mathématiques Générales I

Parcours PEIP

Planche 2 Fonctions usuelles

corrigé partiel

Exercice 7.

Notons $\Delta = \arctan(a) + \arctan(b)$.

Puisque la fonction arctan prend ses images dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\Delta \in]-\pi, \pi[$.

De plus, si $a, b \geq 0$ et $ab > 1$, alors $a > \frac{1}{b} = \frac{1}{\tan\left(\arctan(b)\right)} = \operatorname{cotan}\big(\arctan(b)\big) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(b)\right)$. Or a et $\frac{\pi}{2} - \arctan(b)$ sont alors dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et puisque la fonction arctan est croissante sur cet intervalle, on a $\arctan(a) > \frac{\pi}{2} - \arctan(b)$ et donc $\Delta > \frac{\pi}{2}$.

Par un raisonemment similaire, on a :
- si $a, b \geq 0$ **et** $ab = 1$ **:** alors $\Delta = \frac{\pi}{2}$;
- si $a, b \geq 0$ **et** $ab < 1$ **:** alors $0 \leq \Delta < \frac{\pi}{2}$;
- si $a, b \leq 0$ **et** $ab < 1$ **:** alors $-\frac{\pi}{2} < \Delta \leq 0$;
- si $a, b \leq 0$ **et** $ab = 1$ **:** alors $\Delta = -\frac{\pi}{2}$;
- si $a, b \leq 0$ **et** $ab > 1$ **:** alors $\Delta < -\frac{\pi}{2}$.
Enfin, si a et b sont de signes contraires, alors $\arctan(a)$ et $\arctan(b)$ le sont aussi et $\Delta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Maintenant, si $ab = 1$, alors $\Delta = \pm\frac{\pi}{2}$ selon que a et b sont tous les deux positifs ou tous le deux négatifs.

Autrement, $\tan(\Delta)$ est bien défini et d'après la formule pour la tangente d'une somme, on a

$$\begin{aligned} \tan(\Delta) &= \frac{\tan\left(\arctan(a)\right) + \tan\left(\arctan(b)\right)}{1 - \tan\left(\arctan(a)\right)\tan\left(\arctan(b)\right)} \\ &= \frac{a+b}{1-ab}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\Delta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Mais d'après les différents intervalles d'appartenance remarqués précédemment, on en déduit que
- si $a, b \geq 0$ **et** $ab > 1$ **:** alors $\Delta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$;
- si $a, b \leq 0$ **et** $ab > 1$ **:** alors $\Delta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$;
- si $ab < 1$ **:** alors $\Delta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

Exercice 15.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Domaine de définition :

Pour que f soit définie, il faut que

i. $1+\sin x$ soit non nul ;
ii. $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ soit positif.
Pour *i.*, il suffit que, à 2π près, x ne soit pas égal à $-\frac{\pi}{2}$. La condition *ii.* est toujours vérifiée puisqu'il s'agit d'un quotient de nombres positifs.

La fonction f est donc définie sur $D_f := \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$

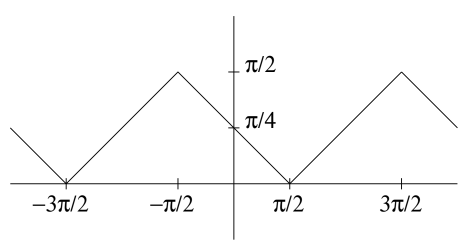
Dérivé :

La fonction f est une composition de fonctions toutes dérivables sauf $(t \mapsto \sqrt{t})$ qui ne l'est que sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc elle-même dérivable en tout point $x \in D_f$ tel que $\frac{1-\sin x}{1+\sin f} \neq 0$, c'est à dire pour tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\frac{\left(\frac{-(1+\sin x)\cos x-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\right)}{1+\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}^2} \\
&= -\frac{\left(\frac{\left(\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\right)}{1+\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \\
&= -\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\left(\frac{1+\sin x+1-\sin x}{1+\sin x}\right)} \\
&= -\frac{\cos x}{2\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}} \\
&= -\frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} \\
&= -\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos^2 x}} \\
&= -\frac{\cos x}{2|\cos x|} \\
&= -\frac{\mathrm{signe}(\cos x)}{2}.
\end{aligned}
$$

La fonction f est donc affine par morceaux.

Graphe :



Exercice 16.

Soit la fonction g définie par $g(x) = \text{arcos}(4x^3 - 3x)$.

Domaine de définition :

La fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$, il faut donc que l'on ait $-1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$. Pour déterminer les valeurs de x auxquelles cela correspond, on étudie les variations du polynôme :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x^3 - 3x \end{array}.$$

En calculant P', on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$1/2$		1		∞
P'		$+$		$+$		$-$		$+$		$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

On en déduit que g est définie sur $[-1, 1]$.

Dérivé :

La fonction g est la composé d'un polynôme avec $\big(t \mapsto \text{arcos}(t)\big)$ qui est dérivable sur $]-1, 1[$. D'après le tableau de variations de P, elle est donc dérivable sur $]-1, 1[\setminus\{-1/2, 1/2\}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{12x^2 - 3}{\sqrt{1 - (4x^3 - 3x)^2}} \\ &= -3\frac{4x^2 - 1}{\sqrt{1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6}} \\ &= -3\frac{4x^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2)(4x^2 - 1)^2}} \\ &= -3.\text{signe}(4x^2 - 1)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

En primitivant g', on obtient que
- sur $\left]-1, -1/2\right[$, on a $g(x) = 3\text{arcos}(x) + c_1$;
- sur $\left]-1/2, 1/2\right[$, on a $g(x) = 3\text{arcsin}(x) + c_2$;
- sur $\left]1/2, 1\right[$, on a $g(x) = 3\text{arcos}(x) + c_3$,

où c_1, c_2 et c_3 sont trois constantes à déterminer. Or, $g(0) = \text{arcos}(0) = \frac{\pi}{2} = 3\text{arcsin}(0) + \frac{\pi}{2}$ donc $c_2 = \frac{\pi}{2}$. Et par continuité de g sur $[-1, 1]$, on en déduit, en évaluant en -1 et en 1, les valeurs $c_1 = -2\pi$ et $c_3 = 0$.

Remarques :

1. On peut montrer (par exemple en dérivant) que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\text{arcos}(x) + \text{arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que sur $\left]-1/2, 1/2\right[$, on aussi $g(x) = 2\pi - \text{arcos}(x)$.
2. On peut arriver à la même conclusion sur g en remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(3x) = 4\cos^2 x - 3\cos x$.

Exercice 18.

Supposons que l'on a $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$. On a alors

$$\tan\Big(\arctan(x)+\arctan(2x)\Big) = \frac{\tan\big(\arctan(x)\big) + \tan\big(\arctan(2x)\big)}{1 - \tan\big(\arctan(x)\big)\tan\big(\arctan(2x)\big)} = \frac{x + 2x}{1 - 2x.x} = \frac{3x}{1 - 2x^2} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

et donc, on a $3x = 1 - 2x^2$ ce qui signifie que x est racine du polynôme $2X^2 + 3X - 1$. Donc $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ ou $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$. Or, si x est négatif, $\arctan(x) + \arctan(2x)$ est également négatif et ne peut donc pas être égal à $\frac{\pi}{4}$. On en déduit que la seule solution éventuelle est $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Or, en notant f la fonction définie par $f(t) = \arctan(t) + \arctan(2t)$, on a $f(0) = 0 < \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi > \frac{\pi}{4}$. Donc par continuité de f, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

On en conclut que $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

On suppose maintenant que l'on a $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tel que $\arccos(x) = \arcsin(2x)$. On a alors

$$x = \cos\big(\arcsin(2x)\big) = \sqrt{1 - (2x)^2}$$

et donc, en élévant au carré, $x^2 = 1 - 4x^2$, ce qui donne $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Or la fonction arcos prend ses valeurs dans $[0, \pi]$ et la fonction arcsin dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\arccos(x) = \arcsin(2x)$ est nécessairement dans $[0, \pi] \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, or $\arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) < 0$. La seule valeur éventuelle possible est donc $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Or, en notant g la fonction définie par $g(t) = \arccos(t) - \arcsin(2t)$, on a $g(0) = \frac{\pi}{2} > 0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$. Donc par continuité de g, il existe au moins une solution à l'équation $g(x) = 0$.

On en conclut que $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est l'unique solution de l'équation $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

On suppose enfin que l'on a $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$ tel que $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\tan(a+b+c) &= \frac{\tan(a+b) + \tan(c)}{1 - \tan(a+b)\tan(c)} = \frac{\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} + \tan(c)}{1 - \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\tan(c)} \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) - \tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(b) - \tan(b)\tan(c) - \tan(a)\tan(c)}.\end{aligned}$$

En passant l'équation par la fonction tan, on obtient donc

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x}\frac{1}{x-3}\frac{1}{x+3}}{1 - \frac{1}{x}\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3}\frac{1}{x+3}} = 1,$$

ce qui donne

$$\frac{(x^2-9) + x(x+3) + x(x-3) - 1}{x(x^2-9)} = \frac{x(x^2-9) - (x+3) - (x-3) - x}{x(x^2-9)},$$

ou encore

$$x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = (x-5)(x^2 + 2x - 2) = 0,$$

dont les solutions sont $x = 5$, $x = -1 + \sqrt{3}$ et $x = -1 - \sqrt{3}$.

Il y a donc trois candidats possibles.

Déterminons maintenant le nombre de solutions en étudiant la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$ par $h(t) = \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \arctan\left(\frac{1}{t-3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{t+3}\right)$. La fonction h étant une composition de fonctions dérivables, elle est dérivable avec, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$:

$$h'(t) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{-\frac{1}{(x-3)^2}}{1+\frac{1}{(x-3)^2}} + \frac{-\frac{1}{(x+3)^2}}{1+\frac{1}{(x+3)^2}} < 0.$$

La fonction h est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-3, 0[$, $]0, 3[$ et $]3, \infty[$ (l'intervalle $]-\infty, -3[$ ne nous intéresse pas puisqu'il ne contient pas de solution éventuelle). Or

$$\lim_{\substack{t \to -3 \\ t > -3}} h(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/3) - \arctan(1/6) \qquad \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} h(t) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(1/3) + \arctan(1/3) = -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} h(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/3) + \arctan(1/3) = \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4} \qquad \lim_{\substack{t \to 3 \\ t < 3}} h(t) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(1/3) + \arctan(1/6)$$

$$\lim_{\substack{t \to 3 \\ t > 3}} h(t) = \frac{\pi}{2} + \arctan(1/3) + \arctan(1/6) > \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4} \qquad \lim_{t \to \infty} h(t) = 0 < \frac{\pi}{4}.$$

Mais d'après l'exercice 7, on a $\arctan(1/3) + \arctan(1/6) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3.6}}\right) = \arctan\left(\frac{9}{17}\right) < \frac{\pi}{4}$ puisque $0 < \frac{9}{17} < 1$. On en déduit que $\lim_{\substack{t \to -3 \\ t > -3}} h(t) > \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{\substack{t \to 3 \\ t < 3}} h(t) < \frac{\pi}{4}$.

Au final, par continuité de h, on trouve une solution à l'équation $h(x) = \frac{\pi}{4}$ dans chacun des trois intervalles.

On en conclut que $-1+\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$ et 5 sont les trois seules solutions à l'équation $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 19.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)} &= \frac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{e^{2x}-e^{-2x}} - \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \\ &= \frac{2(e^{2x}+e^{-2x}) - (e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})} \\ &= \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})} \\ &= \frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})} \\ &= \text{th}(x). \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \text{th}(2^k x) = \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}.$$

Pour $n = 0$, c'est la formule que nous venons de montrer.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} 2^k \text{th}(2^k x) &= 2^{n+1}\text{th}(2^{n+1}x) + \sum_{k=0}^{n} 2^k \text{th}(2^k x) \\ &= 2^{n+1}\text{th}(2^{n+1}x) + \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}, \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. Mais en appliquant le cas $n=0$ à $2^{n+1}x$, on obtient $\text{th}(2^{n+1}x) = \frac{2}{\text{th}(2^{n+2}x)} - \frac{1}{\text{th}(2^{n+1}x)}$. Cela donne $2^{n+1}\text{th}(2^{n+1}x) = \frac{2^{n+2}}{\text{th}(2^{n+2}x)} - \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1}x)}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k \text{th}(2^k x) = \frac{2^{n+2}}{\text{th}(2^{n+2}x)} - \frac{1}{\text{th}(x)},$$

ce qui est bien la formule voulue au rang $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20.

Montrer cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a

$$\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{2} = \frac{(e^{x/2} + e^{-x/2})(e^{x/2} - e^{-x/2})}{2(e^{x/2} - e^{-x/2})} = \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^{x/2} - e^{-x/2})} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} . \frac{2}{2(e^{x/2} - e^{-x/2})} = \frac{\text{sh}(x)}{2\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On suppose maintenant le résultat vrai au rang n. On a alors

$$P_{n+1}(x) = \text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) = \text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \frac{\text{sh}(x)}{2^n \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Mais en appliquant le cas $n = 1$ à $\frac{x}{2^n}$, on obtient $\text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2\text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$, ce qui donne

$$P_{n+1}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{2^{n+1}\text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)},$$

ce qui est bien la formule voulue au rang $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\text{sh}(t)}{t} = \frac{\text{sh}(t) - \text{sh}(0)}{t-0}$. Or, puisque la fonction sh est une combinaison de fonctions exponentielles toutes dérivables en 0, la fonction sh est elle-même dérivable en 0 et un calcul direct montre que $\text{sh}' = \text{ch}$. On en déduit que $\lim_{t\to 0} \dfrac{\text{sh}(t)}{t}$ existe et vaut $\text{ch}(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(x) = \frac{\text{sh}(x)}{2^n \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\text{sh}(x)}{x} \frac{\frac{x}{2^n}}{\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Or, quand n tend vers l'infini, $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0. Donc, d'après ce qui précède et en posant $y = \frac{x}{2^n}$, on a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \lim_{y\to 0} \dfrac{1}{\frac{\text{sh}(y)}{y}} = 1$. On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x}.$$