Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

Parcours PEIP

Planche 3bis Èquations différentielles

Résoudre, en précisant sur quel intervalle, les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - 6y(x) = 0$;
2. $y'(x) + 3y(x) = 2$, avec $y(0) = 1$;
3. $3y'(x) - y(x) = e^x$;
4. $y'(x) + 6y(x) = 2x + 1$;
5. $y'(x) + xy(x) = 2x$;
6. $(1 + x^2)y'(x) = 2xy(x)$;
7. $(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = 1 + 2x^2$;
8. $xy'(x) - 2y(x) + x\ln(x) = 0$;
9. $(1 + x^3)y'(x) - x^2y(x) = 0$;
10. $xy'(x) - 2y(x) = x^3 \arctan(x)$;
11. $y''(x) + y'(x) + 4y(x) = 0$;
12. $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$;
13. $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = e^x$;
14. $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = e^{\pi x}$;
15. $y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = x + e^{3x}$;
16. $2y''(x) + y'(x) + 2y(x) = x^2 - 1$;
17. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$;
18. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = (x - 1)e^x$;
19. $y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin(x)}$;
20. $y''(x) + y'(x) = x - 1$;
21. $y(x)y'(x) + \big(y(x)\big)^2 = \frac{e^{2x}}{2}$.

Solutions :

Dans tout ce qui suit, A et B sont des constantes réelles.

1. $y(x) = Ae^{6x}$, sur $\mathbb{R}$;
2. $y(x) = \frac{2+e^{-3x}}{3}$, sur $\mathbb{R}$;
3. $y(x) = \frac{e^x}{2} + Ae^{\frac{x}{3}}$, sur $\mathbb{R}$;
4. $y(x) = \frac{3x+1}{9} + Ae^{-6x}$, sur $\mathbb{R}$;
5. $y(x) = 2 + Ae^{-\frac{x^2}{2}}$, sur $\mathbb{R}$;
6. $y(x) = A(1+x^2)$, sur $\mathbb{R}$;
7. $y(x) = x + \frac{A}{\sqrt{1+x^2}}$, sur $\mathbb{R}$;
8. $y(x) = x\big(1+\ln(x)\big) + Ax^2$, sur $\mathbb{R}_+^*$;
9. $y(x) = A\sqrt[3]{1+x^3}$, sur $]-\infty,-1[$ ou sur $]-1,\infty[$; $y(x)=0$ est l'unique solution définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ entier ;
10. $y(x) = \begin{cases} x^3\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + Ax^2 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^3\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + Bx^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$, sur $\mathbb{R}$;
11. $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{15}x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{15}x}{2}\right)\right)$, sur $\mathbb{R}$;
12. $y(x) = \frac{1}{5}(2e^{3x} + 3e^{-2x})$, sur $\mathbb{R}$;
13. $y(x) = \frac{e^x}{4} + (Ax+B)e^{3x}$, sur $\mathbb{R}$;
14. $y(x) = \frac{e^{\pi x}}{\pi^2-4\pi+3} + Ae^{3x} + Be^x$, sur $\mathbb{R}$;
15. $y(x) = \frac{e^{3x}+6x-4}{18} + e^{-x}\big(A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)\big)$, sur $\mathbb{R}$;
16. $y(x) = \frac{2x^2-2x-5}{4} + e^{-\frac{x}{4}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{15}x}{4}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{15}x}{4}\right)\right)$, sur $\mathbb{R}$;
17. $y(x) = \frac{e^{-2x}}{12}\left(x^4 + Ax + B\right)$, sur $\mathbb{R}$;
18. $y(x) = (x-4)e^x + Ae^{\frac{(\sqrt{5}-1)x}{2}} + Be^{\frac{-(\sqrt{5}+1)x}{2}}$, sur $\mathbb{R}$;
19. $y(x) = \sin(x)\Big(A + \ln\big(|\sin(x)|\big)\Big) + \cos(x)(B-x)$, sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$;
20. $y(x) = \frac{(x-2)^2}{2} + Ae^{-x} + B$, sur $\mathbb{R}$;
21. $y(x) = e^x\sqrt{Ce^{-4x} + \frac{1}{4}}$, sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}_+$.