Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales 1

Feuille d'exercices n° 4

Théorie des ensembles, applications

I. Théorie des ensembles

Exercice 1 *symboles de théorie des ensembles*

Soient X un ensemble non vide et A, B, C trois parties de X.

1. Expliciter les formules de théorie des ensembles : $x \in A \cup B$, $x \in A \cap B$, $x \in A^c$, où ^{c} désigne le symbole de complément, au moyen des connecteurs logiques et des symboles élémentaires $(x \in A)$ et $(\ x \in B)$.
2. Déterminer les ensembles suivants :
   1. $X \cap \emptyset^c$ 2. $X^c \cap \emptyset$ 3. $(X \cap \emptyset)^c$ 4. $X \cup \emptyset^c$ 5. $(X^c \cap \emptyset)^c$ 6. $(X^c \cup \emptyset)^c \cap X$.
3. Montrer que $\Big(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C\Big) \Rightarrow B \subset C$.

Exercice 2 *Opérations sur les ensembles*

1. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$
   (b) $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$
2. Soient A et B des parties d'un ensemble E, montrer
   (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   (c) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.
3. Soient A et B des parties d'un ensemble E, démontrer que : $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A$.

Exercice 3 *extrait examen 2008*

Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E non vide telles que l'on ait les quatre hypothèses :

$$(1)\ A \cap B = C \cap D; \quad (2)\ C \cup D = E; \quad (3)\ C \subset A; \quad (4)\ D \subset B.$$

Prouver que $C = A$ puis que $D = B$.

Exercice 4 *Produit cartésien*

Etant donnés, deux ensembles A et B, on appelle produit cartésien de A par B, l'ensemble $\{(x, y)/x \in A,\ y \in B\}$.

1. Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$ et $C = \{2, 10\}$. Expliciter les produits cartésiens : $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$, $(A \cap C) \times B$, ainsi que l'ensemble $(A \times B) \cap (C \times B)$. Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser le résultat ? Enoncer un résultat analogue avec les symboles $\cup$ et $\times$.
2. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = [0, 3]$, $J = [0, 4]$, $K = [1, 4]$, $L = [1, 5]$. Dessiner, dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, les ensembles : $I \times J$ et $K \times L$; déterminer : $(I \times J) \cap (K \times L)$.
3. Pour les ensembles quelconques A, B, C, D, déterminer (en justifiant le résultat) $(A \times B) \cap (C \times D)$.
4. Montrer en donnant un contre-exemple, que $(A \times B) \cup (C \times D)$ n'est en général pas un produit cartésien.
5. Que vaut $\emptyset \times B$?
6. Résoudre l'équation : $A \times B = \emptyset$.

Exercice 5 *Ensemble des parties d'un ensemble*

1. Soit l'ensemble $A = \{a\ , b\ , c\ , d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(A)$.
2. L'ensemble $\mathcal{P}(\emptyset)$ est-il vide ?
3. Si E est un ensemble à k éléments, combien $\mathcal{P}(E)$ a-t-il d'éléments ?

II. Applications

Exercice 6 Montrer que la composée de deux applications injectives (resp. surjectives) est une application injective (resp. surjective).

Exercice 7 Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Notons $h = g \circ f$.

1. Montrer que h injective entraîne f injective.
2. Montrer que h surjective entraîne g surjective.

Exercice 8 Soit f une application de X dans Y.

1. Montrer que f est injective si et seulement si il existe une fonction $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = Id_X$. La fonction g est-elle unique ? (*on pourra faire un dessin avec diagramme sagital*)
2. Prouver que f est bijective si et seulement si $\exists! g : Y \to X$ telle que $g \circ f = Id_X$.

Exercice 9 (Application “image réciproque")

On rappelle que si f est une application de X dans X', l'application de $\mathcal{P}(X')$ dans $\mathcal{P}(X)$, notée commodément mais abusivement f^{-1}, qui à A' associe $f^{-1}(A')$, est toujours bien définie.

Soient X, X' deux ensembles et $f : X \to X'$ une application.

1. Rappeler la définition de $f(A)$ pour une partie A de X, ainsi que la définition de $f^{-1}(A')$ pour une partie A' de X'.
2. Si f est une des fonctions usuelles $\cos x$, $\sin x$, e^x, x^2, $\sqrt{x}$ ou $\ln x$, déterminer $f^{-1}(\{y\})$, suivant les valeurs du réel y et dire si f est injective ou surjective.
3. Pour tous $(A, B) \in \mathcal{P}(X)^2$ et $(A', B') \in \mathcal{P}(X')^2$, montrer que :
   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   (b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (*on dessinera un contre-exemple à l'autre inclusion).*
   (c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
   (d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
4. Pour tout $A \subset X$, $A' \subset X'$, comparer :
   (a) $f(A^c)$ et $f(A)^c$; $f^{-1}(A'^c)$ et $f^{-1}(A')^c$.
   (b) A et $f^{-1}(f(A))$; A' et $f(f^{-1}(A'))$.
5. Montrer que $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$;

Exercice 10 Soient les fonctions

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x + 2 \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 4 \end{array} \right.$$

Calculer $f \circ g$, $g \circ f$ ainsi que la fonction

$$fg : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

Exercice 11 Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction s par

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array} \right.$$

1. Exhiber une fonction paire mais pas impaire, puis une fonction impaire mais pas paire.
2. Existe-t-il des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires ?
3. Trouver toutes les fonctions qui sont à la fois paires et impaires.
4. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire ssi $f \circ s = f$.
5. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire ssi $f \circ s = s \circ f$.

6. Si f est une fonction quelconque, que dire des fonctions

$$x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2} \ ?$$

7. Montrer que toute fonction f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 12 Expliciter $f(]0,1[)$, $f([1,2[)$, $f([-3,-2])$, $f^{-1}(]0,1[)$, $f^{-1}([1,2[)$,$f^{-1}([-3,-1])$,$f^{-1}([-\frac{1}{2},3])$ pour chacune des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suivantes

$$1) \quad f:x\mapsto x^2 \qquad 2) \quad f:x\mapsto e^x \qquad 3) \quad f:x\mapsto \frac{1}{1+x^2} \qquad 4) \quad f:x\mapsto \sin x$$

Exercice 13 *extrait examen 2008*

1. Etant donnée une application f de E vers F, rappeler les définitions mathématiques de f injective et f surjective, puis exprimer que f n'est pas injective, et enfin que f n'est pas surjective. En déduire la définition mathématique de : f n'est pas bijective.
2. On considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{-2\} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x+2} \end{array}$$

– Démontrer que f est injective.
– Combien l'équation $f(x)=1$ a-t-elle de solution ? En déduire que f n'est pas surjective.
– Soit g l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}\backslash\{-2\} & \mapsto & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x+2} \end{array}$$

Justifier que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 14 *extrait DS 2010*

1. Étudier la fonction $g(x)=\sin^2(x)$ définie sur $[-\pi,2\pi]$ et tracer son graphe.
2. Rappelez la définition des ensembles $g([\pi/4,3\pi/4])$ et $g^{-1}([-1/2,1/2])$ et les déterminer l'aide du graphe.

Exercice 15 *extrait DS 2010* (pour information)

Soient X et X' deux ensembles et f une application de X vers X'. Pour tout $A\subset X$, $A'\subset X'$, :

1. montrer que $f^{-1}(A'^c)=f^{-1}(A')^c$.
2. Que peut-on dire de $f(A^c)$ et $f(A)^c$? (*Indic. On dessinera des contres exemples aux deux inclusions.*)