Université de Provence	2011–2012

Mathématiques Générales I

PLANCHE 5

ENTIERS, DÉNOMBREMENTS, ARITHMÉTIQUE.

Dénombrements

Exercice 1. Dans une salle de classe, il y a 30 tables. De combien de façons peuvent prendre place 27 élèves ? 30 élèves ? 31 élèves ?

Exercice 2. Calculer le nombre de :
– nombres de six chiffres qui commencent par un 1.
– nombres de six chiffres qui finissent par un 1.
– nombres de 6 chiffres qui contiennent au moins un 1.
– nombres de 6 chiffres qui contiennent exactement un 1.
(Attention au premier chiffre !)

Exercice 3. On tape cinq chiffres au hasard sur un pavé numérique (de 0 à 9).

1. Combien de nombres de cinq chiffres commencent par un 1.
2. Calculer la probabilité pour que les 5 chiffres forment une suite strictement croissante ? *(l'ordre des nombres choisis est-il important ?)*
3. Si la suite finie $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est croissante, que dire de $(u_1, u_2+1, u_3+2, u_4+3, u_5+4)$?
4. Calculer la probabilité d'obtenir une suite simplement croissante ?

Exercice 4. Poker

Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes. Une main est constituée de 5 de ces cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ? Le jeu est mélangé aléatoirement et on distribue une main. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. une couleur (5 cartes de la même couleur)
2. une paire (2 cartes de même rang, et 3 autres cartes de rangs tous distincts)
3. Une double paire
4. Un brelan (3 cartes de même rang, et 2 autres cartes de rangs tous distincts)
5. un full (une paire et un brelan)
6. un carré
7. Une suite (5 cartes de rangs consécutifs)
8. Une suite finissant par un as
9. une suite avec des cartes d'une seule couleur.

Exercice 5. Jeux de hasard.

On vous propose de jouer à un des deux jeux de hasard décrits ci-dessous :

Jeu 1	**Jeu 2**
Vous payez 1 euro, et lancez 4 pièces de monnaie. Si vous obtenez exactement 2 faces et 2 piles, vous gagnez 3 euros, et dans tous les autres cas vous perdez.	Vous payez 1 euro, et lancez 3 dés. Vous obtenez 2 euros pour chaque 6 que vous obtenez.

On peut calculer le gain moyen espéré en multipliant la probabilité de gagner par le gain. S'il y a plusieurs gain possibles, il faut additionner (proba gain 1) $\times$ (gain 1) + (proba gain 2) $\times$ (gain 2) + ...

1. Calculez le gain moyen espéré dans chacun des cas.
2. À quel jeu préféreriez-vous jouer ?

Exercice 6. Triangle de Pascal

1. Montrer par le calcul les formules ci-dessous.

$$\begin{array}{lll}(a) & C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} & \text{pour } 0 \leq p < n \\ (b) & C_n^p C_p^k = C_n^k C_{n-k}^{p-k} & \text{pour } 0 \leq k \leq p \leq n\end{array}$$

2. Les démontrer maintenant sans calculs. Pour (a), on fixera un élément x dans un ensemble E et on comptera les parties à p éléments qui contiennent a, puis celles qui ne le contiennent pas. Pour (b), on considèrera les couples (A, B) de parties de E, qui vérifient $\operatorname{Card} A = k$, $\operatorname{Card} B = p$ et $A \subset B$. On comptera ces couples en choisissant d'abord A puis en choisissant d'abord B.

Exercice 7. Le binôme de Newton

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$.
2. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$, *(dériver la fonction $x \mapsto (1+x)^n$).*
3. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$ *(cette fois-ci il faut intégrer).*
4. Simplifier $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$ *(calculer le coefficient de x^n dans $(1+x)^n(1+x)^n$).*
5. Calculer $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2k}$ où $[\frac{n}{2}]$ désigne la partie entière de $n/2$ *(développer $(1+1)^n + (1-1)^n$).*

Arithmétique

Exercice 8. Les carrés modulo 4

1. Trouver tous les carrés de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (C'est-à-dire les éléments $y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tels que $\exists y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec $x = y^2$).
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. *(On supposera que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p, q deux entiers premiers entre eux et on aboutira à une contradiction.)*
3. En déduire également que l'équation $x^2 - y^2 = 250$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 9. Divisibilité par 9, 11 et 7

On cherche d'abord à démontrer le résultat classique : Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, calculer 10^i modulo 9.
2. En utilisant que le nombre $m = k_n\, k_{n-1} \cdots k_1\, k_0$ s'écrit $m = \sum_{i=0}^{n} k_i 10^i$, exprimer m modulo 9 et en déduire le critère de divisibilité par 9 donné ci-dessus.
3. Application : 8 431 848 et 21 568 137 888 sont-ils divisibles par 9 ?

Un critère de divisibilité par 11.

1. Pour la divisibilité par 11, reprendre toutes les questions précédentes en remplacant 9 par 11, et en déduire un critère simple.
2. Application : 502 720 427 et 23 929 159 736 sont-ils divisibles par 11 ?

Un critère de divisibilité par 7.

1. Utiliser la décomposition $m = 10 \times k_n\, k_{n-1} \cdots k_1 + k_0$ et les congruences modulo 7 pour montrer que m est divisible par 7 si et seulement si $k_n\, k_{n-1} \cdots k_1 - 2k_0$ est divisible par 7.
2. Application : En déduire un critère de divisibilité par 7 que l'on utilisera sur 12997 et 101941.
3. Peut-on aussi trouver des critères de divisibilité par $2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$?

Exercice 10. Le jeu des allumettes

Ce jeu se joue à 2. On dispose 21 allumettes sur une table et les joueurs enlèvent chacun leur tour de 1 à 3 allumettes. Le vainqueur est celui qui enlève la dernière allumette.

1. Vous commencez. Trouvez la stratégie qui vous permettra de gagner à tous les coups.
2. Au cours de cette partie, une allumette se casse. Vous décidez de recommencer une partie avec 20 allumettes seulement. Comme vous avez gagné la partie précédente, vous avez le droit de choisir qui va commencer. Que choisissez-vous pour être sûr de gagner ?
3. Votre adversaire énervé par ses deux défaites, part acheter une nouvelle boîte d'allumettes. Quand il revient, il vous annonce son intention de commencer la prochaine partie mais s'absente un moment aux toilettes. Vous en profiter pour compter le nouveau nombre d'allumettes. Il y en a 138. Combien d'allumettes devez-vous cacher pour être sûr de gagner la prochaine partie ?
4. Dépité par sa nouvelle défaite, votre adversaire commence à penser que vous avez un truc. Beau joueur, vous lui expliquez que votre stratégie dépend du nombre d'allumettes initial, et qu'elle est très liée au chiffre 4. Mais de quelle façon ?
5. Pour voir s'il a bien compris, vous lui posez la question suivante : " Sur une île déserte après le naufrage d'un cargo d'allumettes pendant lequel toutes les calculettes embarquées ont coulé, les deux seul survivants décident pour tuer le temps d'entamer une partie avec les 768 234 135 boîtes contenant chacune 118 allumettes qu'ils ont retrouvées. Faut-il commencer ou non pour être sûr de gagner ? Et quel serait le premier coup ?"