Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

INDICATIONS ET CORRECTION POUR LA PLANCHE 6

NOMBRES RÉELS. SUITES RÉELLES.

Nombres réels.

Exercice 1. Si dans l'écriture décimale de x le même motif A de longueur n se répête indéfiniment, alors en multipliant par 10^n on obtient $10^n x = A + x$. Ce qui donne x.

Exercice 2. Supposer que $x > y$ et ensuite que $x \leq y$.

Exercice 3.

a. C'est un carré.

b. Encore un carré

c. Travailler d'abord dans le quart de plan $x > y$ et $x > -y$, puis dans les trois autres quarts.

Exercice 4.

1. Revenir à la définition.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

Exercice 5. $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ avec égalité seulement dnas certains cas (lesquels ?).

Exercice 6.

6. $\sup = 1$ et $\inf = -1$, pas de min ni de max

7. $\inf = 1$, pas de min et non majoré.

Suites réelles.

Exercice 7.

a. $\exists M \in \mathbb{R}, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_M\ ,\ |u_n| \leq M$.
C'est complétement équivalent au fait d'être bornée. En effet, si ce dernier énnoncé est vrai, alors on peu obtenir un majorant global en posant $M_g = \max \left\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N_M-1}|, M\right\}$

b. $\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| \geq \epsilon$.

c. $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| \geq \varepsilon$.

Exercice 8.

a. Faux

b. Faux. (si les deux suites encadrentes ne convergent pas vers la même limite).

c. Faux

d. Vrai.

e. Faux.

f. Vrai.

Exercice 9.

1. croissante.
2. croissante à partir du rang 3.
3. croissante.
4. décroissante.
5. Ni l'un ni l'autre.

Exercice 10.

1. converge vers 1.
2. diverge vers $-\infty$.
3. diverge vers $-\infty$.
4. convergente (vers $\frac{\pi^2}{6}$)
5. converge vers $\frac{3}{2}$.
6. converge vers 1
7. converge vers -1
8. converge vers 0

Exercice 11. (Suite géométrique)
Les cas limites sont $a = -1$ et $a = 1$.

Exercice 12. $u_n = 2^{n+1} + 3$.

Exercice 13. La suite converge vers $\sqrt{2}$. C'est un algorithme déjà connu des babyloniens en 2000 av-J.C.

Exercice 14. Comme $0 \leq u_n \leq 1$, et $0 \leq v_n \leq 1$ on a $u_n v_n \leq u_n$ et $u_n v_n \leq v_n$, ce qui permet de conclure avec le théorème des gendarmes.

Exercice 15. On rappelle que pour calculer $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, il faut multiplier en haLesut et en bas par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Sinon, les calculs sont simples, et les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des exemples pour le dernier ennoncé.

Exercice 16. Supposons que la suite converge vers l. Pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, on a donc qu'à partir d'un rang N, $|u_n - l| \leq \frac{1}{4}$. Mais un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$ ne contient au plus qu'un seul entier relatif. donc il doit y avoir un entier dans l'intervalle $[l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4}]$, et tous les u_n à partir du rang N sont égaux à cet entier. La suite (u_n) est donc constante à partir du rang N donc stationnaire.

Exercice 17. Si $m = \sup A$, alors par définition m est un majorant de A. Maintenant, pour tout $n \geq 1$, on sait que $m - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant, donc on peut toujours trouver un élément de A supérieur à $m - \frac{1}{n}$. Notons a_n un tel élément. On construit ainsi une suite (a_n) qui vérifie $m - \frac{1}{m} \leq a_n \leq m$. D'après le théorème des gendarmes, (a_n) converge vers m.

Si m est un majorant et qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A convergent vers m. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang N, $m - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_n$. Et donc $m - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Donc m est bien le plus petit des majorants de A, donc sa borne sup.

Exercice 18.

a. On ajoute à chaque rang un terme positif.

b. $u_{2n} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

c. Si $(u_n)_n$ convergeait vers un réel l, que ferait (u_{2n}) ?

Exercice 19.

a. La racine est bien définie si a_n et b_n sont positifs. Un calcul rapide (un quotient) montre que $a_{n+1} \geq a_n$ ssi $a_n \leq b_n$. On peut donc essayer de montrer par récurrence que $0 \leq a_n \leq b_n$. Pour cela, on démontrera d'abord l'inégalité $2\sqrt{xy} \leq x + y$, valable pour $x, y \geq 0$.

b. C'est clair maintenant que l'on sait que pour tout n, $a_n \leq b_n$. On n'a plus besoin de récurrence.

c. La suite (a_n) est croissante majorée (par quoi ?), donc converge vers un l réel et (b_n) est croissante minorée (par quoi ?), donc converge vers un l'. En passant à la limite, on obtient $l = \frac{l+l'}{2}$ et donc...

Exercice 20.

a. Soit $\varepsilon > 0$. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l, alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N_1$, $|u_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et que pour $n \geq N_2$, $|u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$. On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Si $n \geq N$, alors
– soit n et pair et alors $n = 2k$ avec $k \geq N_1$ ce qui implique $|u_n - l| = |u_{2k} - l| \leq \varepsilon$;
– soit n est impair et alors $n = 2k + 1$ avec $k \geq N_2$ ce qui implique $|u_n - l| = |u_{2k+1} - l| \leq \varepsilon$. CQFD.
b. Utiliser la suite (u_{6n}) pour montrer que $l = l''$ et la suite (u_{6n+3}) pour montrer que $l' = l''$. Et on utilise le point a. précédent pour conclure.

Exercice 21. a. $u_{2(n+1)} - u_{2n} = \frac{1}{v_{2n+2}} - \frac{1}{v_{2n+1}} \leq 0$ car (v_n) est croissante. De même (u_{2n+1}) est croissante. Et ensuite $u_{2n+2} - u_{2n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

b. Les deux suites convergent car croissante majorées et ... Elless ont la même limite car sont de plus en plus proches.

Exercice 22. (u_n) est clairement croissante. Un calcul de $v_{n+1} - v_n$ montre que (v_n) est décroissante. Et la différence des deux tends vers zéro donc elles convergent vers la même limite.

Exercice 23.

a. Le seul problème de définition est posé par la racine. Il faut que u_n soit toujours au moins supérieur à -1 pour que l'on puisse définir la racine. Mais a priori, u_n est déjà la racine de u_{n-1} donc cela devrait marcher. On peut en fait démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b. $l = \sqrt{1+l}$

c. Récurrence.

Pour le reste, les questions sont claires.

Exercice 24. Soit x un réel. On définit $E(x)$ par :

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

a. 3, 1,-1,2
b. Une fonction en dent de scie..
c. $E\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ si $n \geq$....
d. Vient de la définition.
e. $x - 1 < E(x) \leq x$.
f. Utiliser l'encadrement précédent pour chacun des termes de la somme.
g. $(E(u_n))_n$ est une suite d'entier donc elle converge ssi elle est stationnaire (constante à partir d'un certain rang), c-à-d ssi il existe un entier m et un rang N à partir duquel $u_n \in [m, m+1[$.