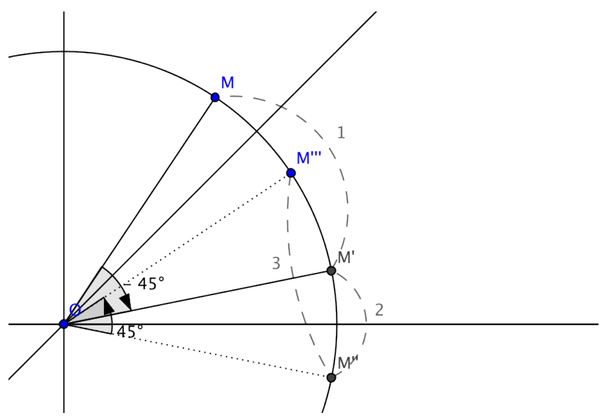
Rab de groupes et géométrie.

Exercice 1. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on note :
– r_θ la rotation de centre l'origine et d'angle θ.
– t_a la translation d'un vecteur d'affixe a.
– d_α la droite passant par l'origine et faisant un angle α avec l'axe des réels.
– s_α la symétrie par rapport à d_α.
1) Soit M un point du plan complexe d'affixe z. Donner les affixes de $M' = r_\theta(M)$, $M'' = s_0(M)$, $M''' = s_{\frac{\pi}{2}}(M)$. En déduire l'écriture en complexe de la rotation r_θ et des deux symétries ci-dessus.

2) Nommer géométriquement les applications $z \mapsto i\bar{z}$, $z \mapsto iz$, $z \mapsto -\bar{z}$.

3) En vous aidant du graphique ci-dessous, montrer que la composition suivante $r_\theta \circ s_0 \circ r_{-\theta}$ est en fait la symétrie s_θ *(On cherchera notamment quels sont les points qui restent fixes lors de la composition)*. En déduire la formule complexe de la symétrie s_θ.



4) Calculer l'affixe de $r_\theta \circ r_{\theta'}(M)$. Qu'obtient on en composant deux rotations de centre l'origine ?

5) Calculer l'affixe de $s_\alpha \circ s_\beta(M)$. Qu'obtient on en composant deux symétries dont les droites se coupent en l'origine ? Essayer de retrouver cela à l'aide d'un dessin.

6) On note $\mathcal{R}_0$ l'ensemble des rotations de centre l'origine, et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des rotations. Les ensembles $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{S}_0$ sont-ils stables par composition ? Que vaut $\mathcal{R}_0 \cap \mathcal{S}_0$?
Pour la question suivante, on définit
– $r_{\theta,b}$ la rotation de centre le point d'affixe b et d'angle θ.
– $d_{\alpha,b}$ la droite passant par le point b et faisant un angle α avec l'axe des réels.
– $s_{\alpha,b}$ la symétrie par rapport à $d_{\alpha,b}$.
7) Reprendre les questions précédentes avec ces nouvelles symétries et rotations.

On note alors $\mathcal{R}$, l'ensemble de toutes les rotations, $\mathcal{S}$, l'ensemble des symétries, et $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations.
8) Quels ensembles stables par composition peut-on former à partir de ces trois là ?

Exercice 2. Petits groupes.
1) Ecrire les tables de multiplication de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}\ 2\mathbb{Z})$. Combien de fois un élément peut-il apparatre sur une ligne ? Et sur une colonne ?

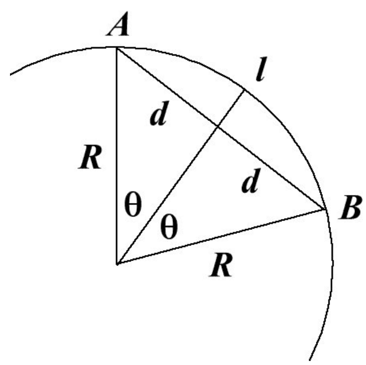
2) Pour un groupe à 4 éléments $\{e, a, b, c\}$, trouver toutes les tables de multiplication possibles. Si on considère comme égales les tables ou on permute seulement les 4 éléments, combien de "classes" reste-t-il ?

Exercice 3. Long courrier.
Les coordonnées de Paris sont : longitude $2,3^o$ Est et latitude 48.9^o Nord. Celles de Valparaiso (65.6^o O, 10.1^o N). On supposera dans cette exercice que la Terre est une sphère de rayon 6400km.

1) Quel type de coordonnées forme le couple longitude lattitude ? Dans quel repère ? Calculer les coordonnées cartésiennes de Paris et Valparaiso dans ce repère.

2) Calculer la distance la plus courte entre Paris et Valparaiso pour :
– Un mineur très résistant à la chaleur qui peut traverser la Terre.
– Un avion dont on négligera l'altitude de vol (très petite par rapport au rayon terrestre).

Aide : La figure ci-dessous pourra vous aider pour trouver le résultat, quand vous connaîtrez la valeur de d ou de θ (A est Paris, B Valparaiso).



Exercice 4. Produit scalaire et vectoriel. Considérez le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Quels sont les vecteurs u tels que $u \cdot v = 0$? Quel ensemble forment-ils ?
2) Quels sont les vecteurs w que l'on peut obtenir en prenant le produit vectoriel de v avec un autre vecteur ? Quel est le lien avec la première question ?
3) Lesquels de ces vecteurs peuvent être obtenus en prenant le produit vectoriel de v avec un autre vecteur.

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 795 \\ 11 \\ 167 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$