Université de Provence 2010–2011

**Mathématiques Générales I**

Indications et solutions pour la Planche 7

Géométrie.

**Exercice 1.** Faire les produits vectoriels.

**Exercice 2.** Voir le cours de terminale.

**Exercice 3.** On peut écrire les équations ou écrire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \dots$

**Exercice 4.** Calculer normes de $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ et le produit scalaire.

**Exercice 5.**

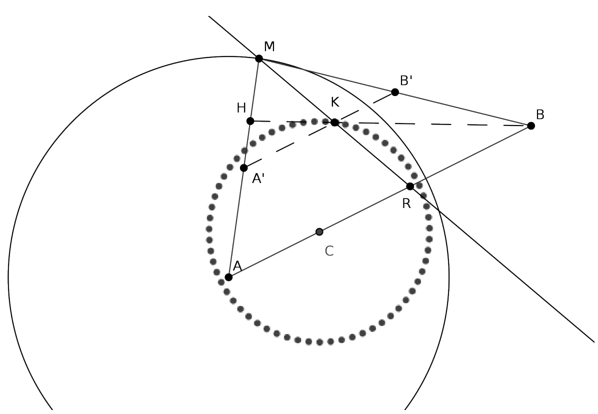
1. Par définition du barycentre et si $O$ désigne l'origine, on a $7\,\overrightarrow{OH} = 2\,\overrightarrow{OA} + 5\,\overrightarrow{OM}$ et $10\,\overrightarrow{OK} = 2\,\overrightarrow{OA} + 3\,\overrightarrow{OB} + 5\,\overrightarrow{OM}$.

   Cela permet d'écrire $10\,\overrightarrow{OK} = 3\,\overrightarrow{OB} + 7\,\overrightarrow{OH}$, ce qui veut dire que $K$ est le barycentre de $(H; 7)$ ; $(B; 3)$. Pour l'autre on peut utiliser $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} = 2\,\overrightarrow{OA'}$ ...

2. Un barycentre de 2 points appartient à la droite engendrée par les deux points.

3. L'homothétie de centre $M$ et rapport 2 envoie $A'$ sur $A$, $B'$ sur $B$ et $K$ sur $R$. Elle préserve les barycentre, donc $R$ est le barycentre de $(A; 2)$ ; $(B; 3)$.

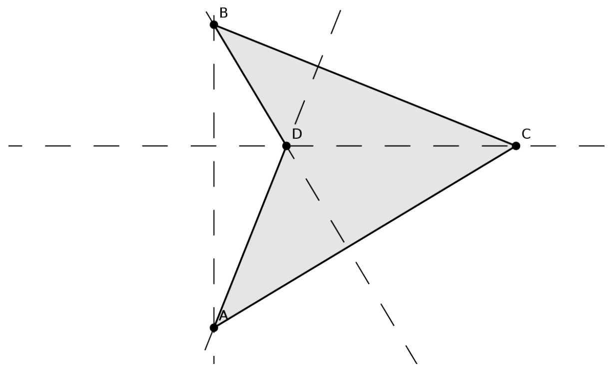
4. Le point $R$ est fixe, et $K$ est toujours le milieu de $[RM]$. Donc $K$ est l'image de $M$ par l'homothétie de centre $R$ et rapport $\frac{1}{2}$. Le point $K$ va donc parcourir l'image du cercle par cette transformation, c'est-à-dire le cercle de centre $C$, le milieu de $[AR]$ (qui est aussi le barycentre de de $(A; 7)$ ; $(B; 3)$) et de centre $\frac{r}{2}$.




**Exercice 6.** Il faut prendre un des produit scalaire et faire apparaître les autres. Par exemple

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD}$$

et on regroupe les trois derniers qui contiennent tous $\overrightarrow{CB}$. Les déductions viennent de la formule. Par exemple, pour un quadrilatère plan




On interprète plus souvent cette égailté en disant que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (pourquoi?).

**Exercice 7.** (*Extrait du DS n°4 posé en 2009-2010.*)

1. Par exemple $\overrightarrow{AB} = |b-a|$.

2. $b - a = e^{i\alpha}(c-a)$

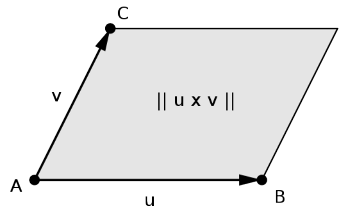
3. On supposeera $c \neq a$. En prenant le module, on obtient $|b-a| = |c-a|$ dans les deux cas. Donc le triangle est isocèle en $A$. Avec l'argument, on voit que l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut $\pm\frac{\pi}{3}$, et donc que le triangle est équilatéral. La réciproque est aussi vraie.

4. Donc le triangle est équilatéral ssi $\frac{b-a}{c-a} = \pm e^{i\frac{\pi}{3}}$. Comme $(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X + e^{i\frac{\pi}{3}}) = X^2 - X + 1$, c'est équivalent à dire que $\frac{b-a}{c-a}$ est racine de $X^2 - X + 1$. En écrivant cela, on trouve la condition annoncée.

**Exercice 8.** (*Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.*)

1. On calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires, avec ou sans produit vectoriel.

2. L'aire du parallèlogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. (sur le dessin on a utilisé la notation anglo-saxone pour le produit vectoriel qui est un $\times$).



L'aire du triangle $ABC$ est la moitié de l'aire du parallèlogramme. on peut aussi exprimer l'aire du triangle $A_T$ en fonction de l'angle $\theta$ entre les deux vecteurs. La formule est $A_T = \frac{AB\,AC|\sin\theta|}{2}$, ce qui permet de calculer $|\sin\theta|$.

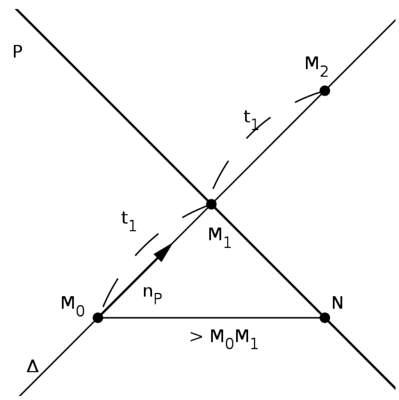
3. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan contenant $A, B$ et $C$, mais il n'est pas de norme un. par contre, le vecteur $\overrightarrow{n} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est bien de norme un et a la même direction que le produit vectoriel, donc il convient. Il reste à le calculer.

**Exercice 9.** (*Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.*)

1. Il faut chercher si des valeurs de $s$ et $t$ qui permettent d'obtenir les coordonnées des points $O$ et $A$.
2. Les coefficients de $s$ (ici $(0, 1, -1)$) dans la forme paramètrique donnent un vecteur du plan $P$ (pourquoi?), et ceux de $t$ (qui sont $(1, 0, 2)$) un autre. Ce sont bien des vecteurs du plan car changer $s$ en $s + 1$ dans la forme paramètrique revient à translater par le premier vecteur. En prenant le produit vectoriel de ces deux vecteurs, on obtient un vecteur $\overrightarrow{n_P} = (2, -1, -1)$ normal au plan $P$. On peut alors en déduire l'équation cartésienne de $P$, car $M \in P$ ssi $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0$. C'est-à-dire
$$2x - y - z = 0$$
3. Le vecteur $\overrightarrow{n_P}$ est un vecteur directeur de cette droite. Les points de cette droite sont donc de la forme $A + t\overrightarrow{n_P}$, pour $t \in \mathbb{R}$, ce qui donne la description paramètrique suivante
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

**Exercice 10.** (*Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.*)

1. Le vecteur $\overrightarrow{n_P}$ de coordonnées $(a, b, c)$ est normal au plan, donc une équation paramétrique est
$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$
2. Notons $M_1$ le point d'intersection de $D$ et $P$. En rentrant la forme paramétrique ci-dessus dans l'équation de $P$, on trouve une seule valeur de $t$ qui convient, que l'on peut noter $t_1$ et qui vaut
$$t_1 = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$
Cela permet de calculer les coordonnées de l'intersection.
3. La distance entre $M_0$ et $(P)$ est la plus petite distance que l'on peut obtenir entre le point $M_0$ et un point $N$ du plan $(P)$ que l'on fait varier. On l'obtient toujours quand la droite $(M_0N)$ est orthogonale au plan $(P)$. Ici, il faut donc choisir $N = M_1$ et la distance recherchée est donc la distance $M_0M_1$. En effet, pour tout autre point du $N$ du plan $P$, le triangle $M_0M_1N$ est rectangle en $M_1$ et on a donc d'après Pythagore $M_0N^2 = M_0M_1^2 + M_1N^2 \geq M_0M_1^2$ (L'argument est d'ailleurs le même dans le cas de la distance d'un point à une droite, on peut alors le visualiser sur le dessin ci-dessous).




4. Le symétrique $M_2$ de $M_0$ vérifiera $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\overrightarrow{M_0M_1}$ donc sera le point de la droite $D$ obtenu avec le paramètre $t = 2t_1$. Voir le dessin ci-dessus fait dans le cas ou $(P)$ est une droite, car la situation est très similaire.

**Exercice 11.** (*Extrait du DS n°4 posé en 2008-2009.*)

1. Les coordonnées des vecteurs directeurs sont donnés par les coefficients de $t$ dans les deux expressions paramétriques. Et comme toujours pour trouver un vecteur $\overrightarrow{n}$ perpendiculaire aux deux droites, on utilise le produit vectoriel.

2. $\{H + s\overrightarrow{n} \mid s \in \mathbb{R}\}$ que l'on peut aussi écrire en coordonnées.

$$\Delta_H \begin{cases} x = 1 + t_H + s \\ y = 1 - t_H + 2s \\ z = t_H + s \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Pour que $\Delta_H$ croise $D'$, il faut que pour des valeurs de $s$ et $t$, les points donnés par les description paramétrique de $D'$ et $\Delta'$ soit les mêmes, et donc que le système de 3 équations à 2 inconnues $(s, t)$ ci-dessous ait une solution.

$$\begin{cases} 2t = 1 + t_H + s \\ 1 = 1 - t_H + 2s \\ -2t = t_H + s \end{cases}$$

C'est possible seulement si $t_H = -\frac{1}{3}$. Cela donne les coordonnées de $H$. Pour trouver celles de $H'$, il faut résoudre le système pour cette valeur particulière de $t_H$.

3. On a un point $H$ et le vecteur directeur, donc l'équation paramétrique est presque là.

4. C'est la distance $HH'$.