Examen du mardi 21 mai 2013

2 heures. Un barème approximatif est donné à titre indicatif. Note sur 28 tronquée à 20.
Seules les tables de lois et calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 : (Questions de cours) (4pts)
1) (1pt) Donner la définition de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (on mentionera quelles sont les valeurs "autorisées" et leurs probabilités associées).
2) (0.5pts) Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de $X_1+\cdots+X_n$?
3) (1pt) Quand dit-on qu'un estimateur $\hat{\theta}$ d'un paramètre inconnu θ est sans biais ? Qu'appelle-t-on risque (quadratique) de l'estimateur $\hat{\theta}$?
4) (1.5pts) Qu'appelle-t-on fonction de répartition d'une variable aléatoire X ? Citer au moins 3 propriétés universelles importantes de cette fonction.

Exercice 2 : (3pts) 100 chasseurs tirent indépendamment sur un même cerf. Chaque chasseur a une chance sur vingt d'atteindre sa cible.
1. (0.5pts) Donner la loi du nombre de balles reçues par le pauvre cerf.
2. (0.5pts) Par quelle autre loi peut-on l'approximer ?
3. En déduire à l'aide des tables une valeur approchée de la probabilité
(a) (1pt) qu'au moins 6 balles l'atteignent.
(b) (1pt) qu'exactement 4 balles l'atteignent.

Exercice 3 : (3.5pts) On sait par expérience qu'une certaine opération chirurgicale a 90% de chances de réussir. Cette opération est réalisée dans une clinique 400 fois chaque année. Soit N le nombre de réussites dans une année.
1. (1pt) Quelle est la loi de N ? Calculer son espérance et sa variance.
2. (0.5pt) Par quelle loi peut-on approximer la loi de N ?
3. (1pt) Calculer à l'aide des tables une valeur approchée de la probabilité que la clinique réussisse au moins 345 opérations dans l'année.
4. (1pt) L'assurance n'accepte de couvrir qu'un certain nombre d'opération ratées : ce nombre n'a que 1% de chance d'être dépassé. Quel est-il ?

Exercice 4 : (6.5pts) Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon d'une loi ayant pour densité :

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{[0,\theta]}(x),\ x \in \mathbb{R},$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.
1. a) (1pt) Calculer l'espérance et la variance des X_i.
b) (1pt) En déduire un estimateur consistant et sans biais $\hat{\theta}_1$ de θ, puis calculer son risque.

2. a) (1pt) Montrer que $\hat{\theta}_2 = \max(X_1,\dots,X_n)$, est l'estimateur du maximum de vraissemblance.
b) (1pt) Montrer que cet estimateur admet une densité que l'on calculera, puis
c) (2pts) calculer son biais et son risque (quadratique).

3. (0.5pt) Quel estimateur vous semble être le meilleur (justifier votre réponse) ?

Exercice 5 : (2pts) On s'intéresse à la faculté germinative d'une espèce, c'est-à-dire à la probabilité p pour qu'une graine, prise au hasard dans la production, germe.
Sur un échantillon de 400 graines, on observe que 330 graines germent. Donner un intervalle de confiance (asymptotique) pour p au niveau de confiance 1%.

Tourner la page SVP

Exercice 6 : (5pts) À la suite d'un traitement sur une variété de rongeurs, on prélève un échantillon de 5 animaux et on les pèse. On obtient les poids en gramme : 83, 81, 84, 80, 85. D'autre part on sait que le poids des rongeurs non traités peut être considéré de loi normale de moyenne 87,6g et d'écart-type 2g.
a) (2.5pts) Le poids moyen des rongeurs diffère-t-il de manière significative de ce poids moyen de référece au seuil $\alpha = 5\%$?
b) (2.5pts) Est-ce que la dispersion autour de la valeur moyenne diffère de manière significative entre les rongeurs traités et les non traités au seuil $\alpha = 5\%$? (on pourra faire un "test sur la variance".)

Exercice 7 : (4pts) On a demandé à 162 étudiants d'estimer le temps mensuel en heures qu'ils passent à préparer la cuisine :

Heures :	$[0, 5[$	$[5, 10[$	$[10, 15[$	≥ 15
Étudiants :	63	49	19	31

Des études antérieures dans l'ensemble de la population ont permis d'établir la répartition suivante :

Heures :	$[0, 5[$	$[5, 10[$	$[10, 15[$	≥ 15
Proportion :	40%	35%	15%	10%

Tester l'adéquation de la distribution observée avec la distribution connue. Donner un encadrement de la p-valeur. Quelle est votre conclusion ?