

Examen du vendredi 28 juin 2013

2 heures. Note sur 28 tronquée à 20.

Seules les tables de lois et calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 : (4pts) Soit N une v.a. de loi $\mathcal{N}(3, 4)$. À l'aide des tables numériques, calculer

- 1) (1pt) $P(N \leq 3, 5)$,
- 2) (1pt) $P(N \geq 2, 5)$,
- 3) (1pt) $P(2, 6 \leq N \leq 3, 4)$.
- 4) (1pt) Trouver $a \in \mathbb{R}$, tel que $P(N \leq a) = 5\%$.

Exercice 2 : (3pts) Dans un élevage de moutons on estime que 30% sont atteints par une certaine maladie. On dispose d'un test pour cette maladie. Si un mouton n'est pas atteint il a 9 chances sur 10 d'avoir une réaction négative au test ; et s'il est atteint il a 8 chances sur 10 d'avoir une réaction positive.

On note M l'évènement "le mouton est malade" et T l'évènement "le mouton a une réaction positive au test". On note \bar{M} et \bar{T} les évènements complémentaires. Ainsi l'énoncé donne :

$$P(M) = 0,3 \quad P(\bar{T} | \bar{M}) = 0,9 \quad P(T | M) = 0,8.$$

- 1) (0,5pt) Quelle est la probabilité qu'un mouton de cet élevage ne soit pas malade ?
- 2) (0,5pt) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un mouton ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?
- 3) (0,5pt) Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade et ait une réaction positive au test ?
- 4) (0,5pt) En moyenne, quelle proportion de l'élevage réagit positivement au test ?
- 5) (0,5pt) Quelle est la probabilité qu'un mouton soit malade sachant qu'il a réagi positivement au test ?
- 6) (0,5pt) Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade sachant qu'il a réagi négativement ?

Exercice 3 : (6pts) Dans une population de 800 personnes, la probabilité pour un individu d'être atteint d'une maladie rare est 0,005.

- 1) (1,5pts) Soit Z le nombre de malades. Quelle est sa loi ? son espérance et sa variance ?
- 2) (1pt) Par quelle loi peut-on l'approximer ?
- 2) (2pts) En déduire des valeurs approchées, à l'aide des tables, de $P(Z > 3)$ et $P(Z = 2)$.
- 3) (1,5pts) Trouver le plus petit entier K tel que la probabilité que le nombre de malades soit supérieur ou égal à K soit inférieur à 10%.

Exercice 4 : (5pts) Étant donné $\theta > 0$, on définit la fonction f_θ par :

$$f_\theta(y) = \begin{cases} \frac{y}{\theta^2} e^{-y/\theta} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

- 1) (1pt) Montrer que pour tout $\theta > 0$, cette fonction définit une densité de probabilité.
- 2) (1,5pts) On suppose désormais que $\theta > 0$ est inconnu. Soit (Y_1, \dots, Y_n) un n -échantillon de loi de densité f_θ . Calculer $E(Y_1)$ et en déduire un estimateur consistant et sans biais $\hat{\theta}_n$ de θ à l'aide de la méthode des moments.
- 3) (1,5pts) Calculer le risque de $\hat{\theta}_n$.
- 4) (1pt) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance ?

Tourner la page SVP

Exercice 5 : (7pts) On cherche à mesurer la concentration en glucose (dit aussi glycémie) dans le sang d'un patient. Pour cela on effectue 5 prélèvements de son sang et on mesure leur glycémie. On modélise les résultats par une suite (X_1, \dots, X_5) de 5 variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1) (2pts) Expliquer ce choix de modélisation. Que représentent les paramètres μ et σ ?

2) On suppose que l'on connaît la valeur de $\sigma = 10\text{mg.l}^{-1}$.

a) (1pt) Sachant que la première mesure donne une concentration de 90mg.l^{-1} , donner un intervalle de confiance pour la glycémie du patient au niveau de confiance 98%.

b) (1pt) Même question en supposant cette fois que les résultats des 5 mesures sont (en mg.l^{-1}) : 90, 96, 94, 86, 97.

3) On ne suppose plus que σ est connu. En réutilisant les valeurs des mesures obtenues dans la question 2b), donner un intervalle de confiance au niveau de confiance 95%

a) (1,5pts) pour μ ,

b) (1,5pts) pour σ^2 .

Exercice 6 : (3pts) Une firme pharmaceutique déclare avoir découvert un nouveau médicament plus efficace que le précédent qui guérissait 70% des patients traités. Avec le nouveau remède, sur un échantillon de 96 patients 86 ont été guéris. Faites un test pour vérifier les affirmations de la firme (au niveau de confiance 95%).