Partiel

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. Il est conseillé de faire d'abord un calcul littéral puis de passer aux applications numériques à la fin.

Exercice 1 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère une v.a. X de carré intégrable.

1. Rappeler la définition de la variance de X.
2. Montrer que $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$.
3. Montrer que si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]$.

Exercice 2 : Dans le jeu du loto, on choisit au hasard 6 numéros différents parmi 49.

1. Modéliser le jeu du loto (déterminer Ω, $\mathcal{A}$ et $\mathbb{P}$).
2. Montrer que la probabilité p de gagner est inférieure à 10^{-6}.
3. On joue la même grille jusqu'au gain et on note T la première fois que l'on gagne. Déterminer la loi de T.
4. On décide de jouer la même grille N fois au loto. Calculer la probabilité de gagner au moins une fois parmi ces N parties en fonction de p. On pourra exprimer cet événement à l'aide de T.
5. En fonction de p, trouver N le nombre minimum de parties qu'il faudrait jouer pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit au moins $1/2$. Si on joue une fois par jour, montrer qu'une vie ne suffirait pas !

On rappelle que $\ln 2 \geq 1/2$ et, pour tout $x > (-1)$, $\ln(1 + x) \leq x$.

Exercice 3 : On estime que 1 % d'une population a une certaine maladie. Un test de diagnostic existe mais n'est pas très fiable : une personne malade a 95 % de chance d'être testée positive, alors qu'une personne saine a 2 % de chance d'être testée positive. Sachant que le test est positif sur une personne prise au hasard, quelle chance a-t-elle d'être malade ? Calculer également la probabilité qu'une personne testée négative soit malade.

Pour les applications numériques, on choisira la valeur la plus proche parmi les suivantes : 100%, 90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 2%, 1%, 0.5%.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 4 : Un groupe de voyageurs emprunte la ligne bleue. Chaque voyageur décide, indépendamment des autres, de frauder avec probabilité $p = 0,1$ ou d'acheter un billet avec probabilité $0,9$. On pose $X_k = 1$ si le k-ième voyageur fraude et $X_k = 0$ s'il achète son billet.

1. On suppose dans cette question que le groupe comprend 50 voyageurs. On note

$$S_{50} = X_1 + \ldots + X_{50}$$

le nombre de fraudeurs.

(a) Calculer la fonction génératrice de S_{50}.

(b) Quelle est la loi de probabilité de S_{50} ?

(c) Quel est le nombre moyen de fraudeurs ?

2. On suppose maintenant que le nombre de voyageurs N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1000$. De plus, chaque voyageur décide de frauder (ou non) indépendamment des autres et du nombre total de voyageurs. On note F le nombre de fraudeurs.

(a) Exprimer F en fonction des X_i et de N.

(b) Calculer $\mathbb{P}[F = k; N = n]$ pour $0 \leq k \leq n$.

(c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}[F = k]$ pour tout $k \geq 0$.

(d) Quelle est la loi de F ?

On rappelle que la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est définie par $\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ pour $k \in \mathbb{N}$.