Partiel du mercredi 20 mars 2013

2 heures. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1 : (Questions de cours)
1) Rappeler la définition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de paramètre $\lambda > 0$. Calculer son espérance.
2) Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Quelle est la loi de $X + Y$? celle de $(X + Y)/2$?

Exercice 2 : Soient A et B deux évènements tels que $P(A) = P(B) = 3/4$. Quelles sont les valeurs maximales et minimales possibles pour $P(A \cap B)$?

Exercice 3 : Un examen contient dix questions et pour chacune d'elles trois réponses sont proposées (une bonne et deux mauvaises). On envisage le cas d'un étudiant qui répondrait absolument au hasard à chacune des questions. On note N le nombre de bonnes réponses obtenues. Quelle est la loi de N ? Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à toutes les questions ? Qu'il se trompe à toutes les questions ? Donner l'espérance et la variance de N.

Exercice 4 : Une urne contient 3 sacs. Le sac S_1 contient deux pièces d'or, le sac S_2 contient une pièce d'or et une pièce ordinaire, et le sac S_3 contient deux pièces ordinaires. Le jeu consiste à tirer un sac au hasard (avec probabilité uniforme), puis à tirer une pièce au hasard dans ce sac.
1) Quelle est la probabilité de tirer une pièce d'or ?
2) Supposons que l'on ait tiré une pièce d'or. Quelle est la probabilité que l'autre pièce dans le sac choisi soit elle aussi en or ?

Exercice 5 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi donnée par

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2 \quad \forall n \geq 1.$$

On pose

$$Y_n = X_n X_{n+1}, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad V_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

1) Calculer pour tout $n \geq 1$, $E(X_n)$, $E(Y_n)$, $E(S_n)$ et $E(V_n)$.
2) Montrer que les $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes 2 à 2, puis calculer $\mathrm{Var}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(V_n)$.

Exercice 6 : Soit $c > 0$ un réel, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ si $|x| \leq c$, et $f(x) = 0$ si $|x| > c$.
1) Pour quelle valeur de c, f est-elle une densité de probabilité ?
2) On suppose cette condition vérifiée. Soit X une v.a. de densité f. Calculer sa fonction de répartition et tracer son graphe.
3) Calculer $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
4) Calculer $P(X > 0,5)$, $P(-0,5 < X < 3)$, et $P(|X| \leq 0,1)$.