Aix-Marseille Université. **Licence Info 2ème année.**
Probabilités et Statistiques. **2013-2014**

Contrôle du jeudi 20 mars 2013

Durée : 2 heures.
Documents interdits. Calculatrices autorisées.
Téléphones portables interdits.

Le barème est donné a titre indicatif. L'énoncé comporte un recto et un verso.

Exercice 1 : Questions de cours (5 points).

1. Rappelez la définition de la loi binomiale $B(n, p)$. Donnez son espérance et sa variance.
2. Donnez la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète X, ainsi que de sa variance.
3. Rappelez la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes X et Y.
4. Donnez la définition d'une loi de Poisson de paramètre λ. Donnez sa variance et son écart-type.

Exercice 2 : (6 points)
On lance deux dés non pipés (on supposera les dés indépendants). On note respectivement X_1 et X_2 les résultats affichés par les deux dés.

1. Donnez la loi de X_1. Calculez son espérance et sa variance.

On note Y le minimum des deux lancers : $Y = \min(X_1, X_2)$.

2. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ? Calculez la probabilité que $Y = 6$, puis celle de l'événement $Y = 2$.
3. De manière générale, calculez la probabilité que $Y = i$, pour toutes les issues i possibles.
   Vous pourrez soit faire les calculs pour chacune des issues non étudiées à la question précédente, soit trouver une formule générale, en fonction de i.

On vous propose le jeu suivant : vous payez trois euros, puis lancez les deux dés. Vous gagnez en euros le minimum Y des deux dés.

4. Seriez-vous prêt à jouer cent fois de suite à ce jeu ? Combien espéreriez-vous alors gagner ?

Exercice 3 : La martingale classique (11 points).
Une roulette (de type "française") de casino comporte 37 cases : 18 rouges, 18 noires et une verte (le zéro). Elles ont toutes la même probabilité de sortir.
Un joueur novice mise un euro sur noir. Si noir sort, il gagne deux euros, et rien sinon. [1]
On note X son gain

$$X = \text{somme gagnée} - \text{somme misée}.$$

1. Quand on mise sur une couleur, on gagne toujours deux fois la mise si l'on gagne.

1. X est une variable aléatoire. Précisez sa loi, son espérance $\mathbb{E}(X)$ et sa variance $\mathbb{V}(X)$.

Après avoir misé de nombreuses fois un euro, il se rend compte qu'il perd de l'argent et arrête de jouer. Il décide de ne plus retourner au casino. Mais quelques jours plus tard, un ami lui explique la fameuse “martingale classique”, avec laquelle on est quasiment sur de gagner, d'après lui. Très confiant, notre joueur décide alors de retourner au casino pour appliquer cette martingale.
Il commence par miser un euro sur noir (ou rouge). S'il gagne il s'arrête et sinon il rejoue en doublant la mise. Et là encore, s'il gagne il s'arrête et s'il perd il rejoue en doublant la mise. Il recommence ainsi ce jusqu'à ce qu'il gagne. On suppose pour l'instant pour simplifier qu'il dispose d'une somme infinie à miser. On note N le nombre de fois où le joueur mise, et Y le gain final.

$$Y = \text{somme finalement gagnée} \ - \ \text{toutes les sommes misées.}$$

2. Donnez les valeurs possibles de N et sa loi. Quelle est l'espérance de N ?
3. Supposons que le joueur gagne à la quatrième fois (et donc qu'il perd aux trois premières). Calculez la somme totale misée, la somme gagnée, et le gain net Y dans ce cas.
4. Justifiez rapidement la formule

$$1 + y + y^2 + y^3 + \cdots + y^n = \frac{y^{n+1} - 1}{y - 1}, \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

5. En déduire que quel que soit le nombre de fois ou le joueur joue, son gain final Y sera toujours de un euro. Donnez l'espérance et la variance de Y.

Encouragé par un premier succès, le joueur recommence cette stratégie. Mais finalement, après de longues heures passées au casino, il perd tout son argent et ne peut plus miser. Il quitte le casino dépité et ruiné. Le lendemain, il rencontre un autre ami (plus malin que le premier) auquel il raconte sa mésaventure. Cet ami lui fait faire l'exercice suivant.

On suppose maintenant que le joueur suit toujours la même stratégie (jouer jusqu'à ce qu'il gagne en doublant la mise en cas d'échec), mais qu'il dispose maintenant d'un capital initial de 500 euros. Avec ce capital initial fini, le joueur devra donc s'arrêter de jouer sans gagner s'il enchaîne les échecs.

6. Calculer le nombre maximal de fois où il peut jouer s'il perd tout le temps. Calculer également son gain final Z (on devrait plutôt dire sa perte) dans ce cas.
7. Donnez la nouvelle loi de N, le nombre de fois ou il va miser.
8. Donnez la nouvelle loi du gain final Z. Et calculez son espérance $\mathbb{E}(Z)$.
9. Pouvez-vous expliquer grâce à vos calculs pourquoi le joueur a finalement perdu tout son argent lors de son dernier passage au casino, malgré sa martingale “infaillible” ?
10. On change le capital initial du joueur. Maintenant, il a suffisamment d'argent pour jouer jusqu'à n_{max} fois de suite. Calculez l'espérance du nouveau Z' en fonction de n_{max}. La conclusion de la question précédente dépend-elle du capital initial ?