Université Paris VII
L3 Maths – Option Maths Appliquées
M7301 - Travaux Pratiques

Méthodes directes d'inversion de systèmes

On cherche à résoudre le système

$$Ax = b \tag{1}$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose que la matrice A est inversible.

1) Ecrire une fonction `cramer` permettant de résoudre le système (1) au moyen de la formule de Cramer :

$$x_i = \frac{\det\left(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_{n-1}, A_n\right)}{\det A}, \quad i = 1, ..., n,$$

où A_j est la $j$ème colonne de A, pour tout $j = 1, ..., n$. On utilisera la fonction `det` de Scilab. Tester votre fonction en considérant par exemple une matrice de Hilbert de taille $n = 5$ (utiliser pour cela la fonction programmée dans le TP précédent) et un second membre b tel que $x = (1, \ldots, 1)^T$ soit solution du systéme. Essayer avec $n = 15$.

2) Ecrire une fonction `descente_lu` permettant de résoudre le système (1) dans le cas où A est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Tester votre fonction sur un exemple simple.

3) Ecrire une fonction `remontee` permettant de résoudre le système (1) dans le cas où A est une matrice triangulaire supérieure (ne possédant pas nécessairement des 1 sur la diagonale). Tester votre fonction sur un exemple simple.

4) Ecrire une fonction `facto_LU` permettant de factoriser A sous forme LU (on supposera que A admet une telle factorisation, c'est-à-dire que les mineurs principaux de A sont non nuls, voir le théorème du cours). On rappelle qu'un algorithme réalisant la factorisation LU d'une matrice A et stockant cette factorisation dans la matrice A elle même est

```
for j=1:1:n-1

 for i=j+1:1:n // construction de la jieme colonne de L
  A(i,j) = A(i,j) / A(j,j)
 end

 for i=j+1:1:n // mise a jour des n-j dernieres lignes
  for k=j+1:1:n // et n-j dernieres colonnes de A
   A(i,k) = A(i,k) - A(i,j) * A(j,k)
  end
 end

end
```

Tester votre fonction sur un exemple simple.

5) Ecrire une fonction `resol_LU` permettant la résolution du système (1) en passant par la factorisation LU de A. Tester votre fonction sur un exemple simple.

6) Tracer à l'écran, en fonction de n (variant de 1 à 25 par exemple), les erreurs en norme $|| \cdot ||_\infty$ pour trouver la solution du système (1) avec la formule de Cramer et la factorisation LU. On pourra faire ces tests avec des matrices de Hilbert (dont on sait qu'elles sont mal conditionnées), et avec un vecteur b tel que $(1, \dots, 1)^T$ est solution du système.