Correction du second devoir surveillé
du mercredi 4 Avril 2007

Exercice 1. (6 points)
1) Pour un système de deux équations du premier ordre, l'espace des solutions sera de dimension deux. Pour résoudre ce système, on l'écrit $Z' = AZ$, avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est:

$$P_A(X) = X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2).$$

Ses deux valeurs propres sont donc 1 et -2. En cherchant les vecteurs propres associés, on trouve

$$\ker(A - Id) = \{x - y = 0\}, \quad \ker(A + 2Id) = \{2x + y = 0\}.$$

On peut choisir $v_1 = {}^t(1\ 1)$ comme vecteur propre associé à la valeur propre 1 et $v_{-2} = {}^t(1\ -2)$ comme vecteur propre associé à la valeur propre -2. Ce qui donne la base suivante pour l'espace des solutions:

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) Toute solution s'écrit donc sous la forme $\lambda e^t v_1 + \mu e^{-2t} v_{-2}$. On choisit μ et λ en fonction des conditions initiales, puisqu'à $t = 0$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pour $x_0 = 2$ et $y_0 = -1$, on voit que $\lambda = 1$ et $\mu = 1$ conviennent. La solution qui vérifie ces conditions initiales est donc

$$Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t v_1 + e^{-2t} v_{-2} = \begin{pmatrix} e^t + e^{-2t} \\ e^t + -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

3) Pour une condition initiale générale (x_0, y_0), λ et μ vérifient:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ y_0 = \lambda - 2\mu \end{cases},$$

que l'on inverse en:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2x_0 + y_0}{3} \\ \mu = \frac{x_0 - y_0}{3} \end{cases}.$$

Remplacant les valeurs de λ et μ obtenues dans l'expression des solutions, on obtient pour une solution ϕ:

$$\phi(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (2x_0 + y_0)e^t + (x_0 - y_0)e^{-2t} \\ (2x_0 + y_0)e^t - 2(x_0 - y_0)e^{-2t} \end{pmatrix},$$

que l'on peut récrire sous la forme $\phi(t) = R(t)\,{}^t(x_0\ y_0)$, ou $R(t)$ est la résolvante du système qui s'écrit:

$$R(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ 2e^t - 2e^{-2t} & e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

4)

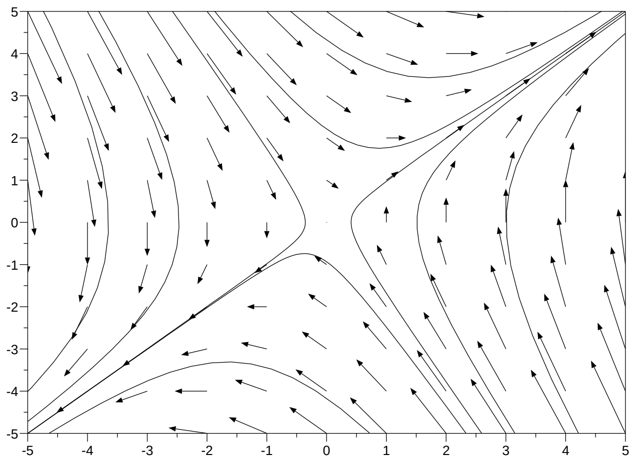

Figure 1: Tracé du champ de vecteurs et de quelques solutions

Exercice 2. (14 points)
Dans un réacteur chimique, un réactif A est introduit en permanence à vitesse constante, et y réagit pour donner le produit B, avec une vitesse de réaction qui dépend de la somme des deux concentrations. Le produit B est ensuite rapidement évacué. Pour modéliser ce réacteur, on écrit l'équation suivante:

$$\begin{cases} x' = 1 - (x + y) \\ y' = (x + y) - \alpha y \end{cases}$$

Les quantités x et y étant des concentrations de produits chimiques, on se restreindra au domaine $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. On supposera aussi que $\alpha > 1$.

1) le terme 1 de la première équation correspond à l'introduction à vitesse constante de réactif dans le réacteur. Les deux termes avec $(x + y)$ correspondent avec leur signe, à la création de produit et la disparition de réactif pour cause de réaction. Et le terme $-\alpha y$ dans la seconde équation correspond à l'évacuation du produit.

2) Un point d'équilibre doit vérifier

$$0 = 1 - (x_{eq} + y_{eq}) \quad \text{et } 0 = (x_{eq} + y_{eq}) - \alpha y_{eq}.$$

Cela détermine un unique point: $x_{eq} = 1 - \dfrac{1}{\alpha}, \quad y_{eq} = \dfrac{1}{\alpha}.$

3) on obtient pour le couple (u, v) le nouveau système,

$$\begin{cases} u' = -u - v \\ v' = u + (1-\alpha)v \end{cases}$$

Ce qui nous donne l'équation demandée pour Z.

4) La forme des trajectoires dépend des valeurs propres de la matrice B. Son polynôme caractéristique est

$$P_B(X) = (X+1)(X+1-\alpha) + 1 = X^2 + \alpha X + \alpha\,,$$

de discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4\alpha$. Ce discriminant est négatif si $\alpha \in]1, 4[$, positif si $\alpha > 4$, et nul si $\alpha = 4$.

- Cas $\alpha > 4$.

  Il y a alors deux valeurs propres réelles $\dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}$. Comme $\alpha^2 - 4\alpha \leq \alpha^2$, ces deux valeurs propres sont donc négatives. On est donc dans le cas d'un noeud stable, et les trajectoires ont la forme suivante:

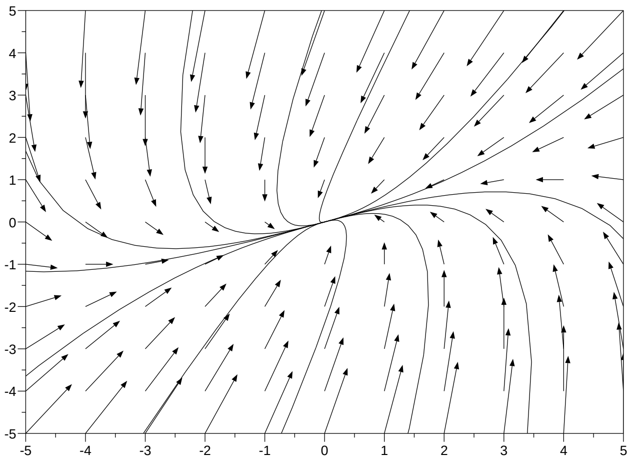

Figure 2: Cas $\alpha > 4$: noeud attractif

- Cas $\alpha \in]1, 4[$.

  Les deux valeurs propres sont complexes conjuguées $\dfrac{-\alpha \pm i\sqrt{4\alpha - \alpha^2}}{2}$. La partie réelles de ses valeurs propres est négative. On est donc en présence d'un foyer attractif ou stable. L'allure des trajectoires est la suivante:

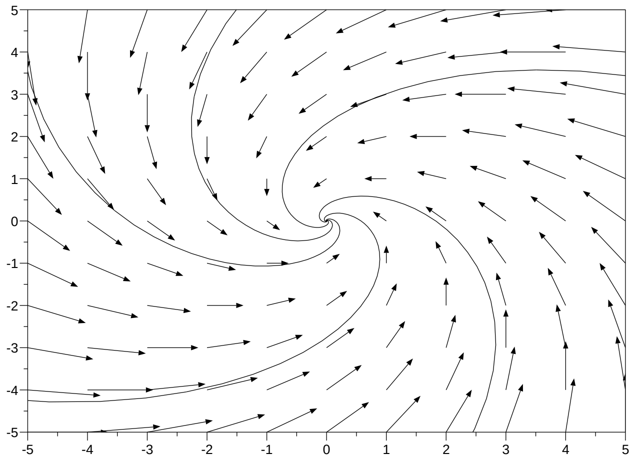

Figure 3: Cas $\alpha \in]1, 4[$: foyer attractif

- Cas $\alpha = 4$.
  Il n'y a alors qu'une seule valeur propre double: -2. On est dans le cas d'un noeud stable, et l'allure des trajectoires est à quelques détails près la même que dans le second cas.

5) Dans les trois cas, les trajectoires sont parcourues vers le centre. Le point d'équilibre est donc toujours stable.

On se propose d'étudier maintenant le nouveau sytème

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 1 + \varepsilon \sin(t) - (x + y) \\ y' = (x + y) - \alpha y \end{array} \right.$$

6) a) Le changement est du à la vitesse d'entrée des réactifs qui dépend maintenant périodiquement du temps.
b) Le système vérifié par (u, v) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = +\varepsilon \sin(t) - u - v \\ v' = u + (1 - \alpha)v \end{array} \right.$$

On obtient donc pour Z l'équation $Z'(t) = AZ(t) + B(t)$, avec $B(t) = {}^t(\varepsilon \sin(t), 0)$.
c) Formellement, les solutions peuvent s'écrire en utilisant la variation de la constante, qui s'écrit:

$$Z(t) = e^{tA} Z_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\, ds$$

d) Si $Z(t) = \sin(t)V + \cos(t)W$, on aura $Z'(t) = \cos(t)V - \sin(t)W$. Et $A\,Z(t) = \sin(t)A\,V + \cos(t)A\,W$. En remplacant dans l'équation, on obtient:

$$\cos(t)V - \sin(t)W = \sin(t)A\,V + \cos(t)A\,W + B(t).$$

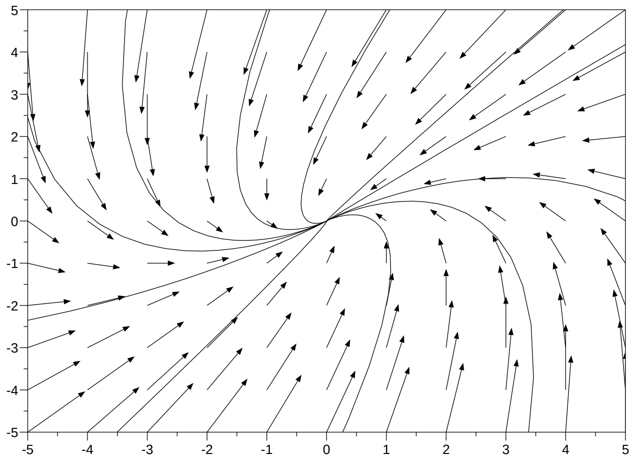

Figure 4: Cas $\alpha = 4$: noeud attractif

comme sin et cos snt deux fonctions indépendantes, les vecteurs derrière sin et cos doivent s'annuler. Cela donne deux équations:

$$V = A_, W \quad , \quad -W = A_, V + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En remplacant V par $A\, W$ dans la seconde, on obtient $(A^2 + Id)W = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$.
Or, pour $\alpha = 2$, on a

$$A^2 + Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible et son inverse est

$$(A^2 + Id)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que $W = -\frac{\varepsilon}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et en composant par A que $V = \frac{\varepsilon}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et la solution particulière est donc

$$Z_0(t) = \frac{\varepsilon}{5} \begin{pmatrix} -\cos(t) + 3\sin(t) \\ -2\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

Cette courbe paramétrée sera une ellipse, centrée en l'origine.
e) Les solutions générales sont de la forme solution particulière plus solution de l'équation homogène:

$$Z(t) = Z_0(t) + e^{At}\Lambda\,,$$

où Λ est un vecteur constant qui dpend des conditions initiales. Le terme $Z_0(t)$ est priodique de priode 2π. Le terme $e^{At}\Lambda$ décroit rapidement vers 0 car toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives. On a donc $\lim_{t \to +\infty} |Z(t) - Z_0(t)| = 0$ et la solution va donc décrire des spirales en se rapprochant de plus en plus de l'ellipse décrite par la solution particulière. Cette ellipse est un cycle limite pour l'EDO non autonome étudiée.

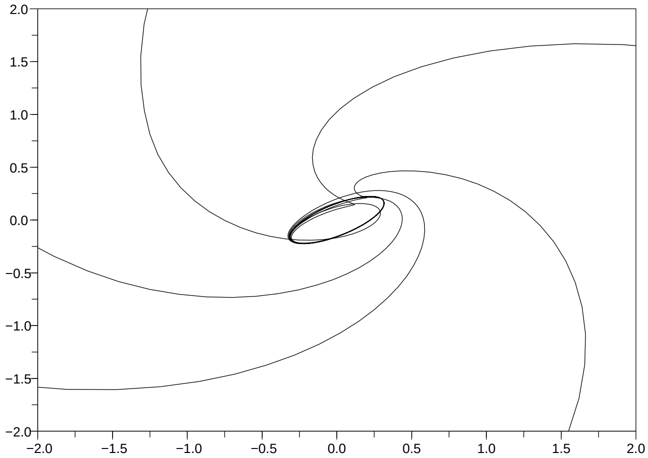

Figure 5: Cas perturbé avec $\alpha = 2$ et $\varepsilon = 2$.