Université Paris 7 Denis Diderot
Licence L3
2006-2007

UFR de Mathématiques
Equations différentielles
P. Perrin

(Un) Corrigé de l'examen
Jeudi 3 mai 2007

Exercice 1. On considère l'équation différentielle $u' = t(3u^2 - 1)$. On constate que la fonction $f(t,u) = t(3u^2-1)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle est également à variables séparées. On en déduit que les solutions maximales sont elles-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, les conditions de Lipschitz sont satisfaites aussi, par un point du plan, passe une et une seule solution maximale.

On constate que l'isocline associée à la pente 0 est formée de la réunion de l'axe des u et des deux droites $u = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. L'équation admet deux solutions constantes $u = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Une solution maximale strictement comprise en un point entre $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ prend toutes ses valeurs dans ce même intervalle. Par ailleurs elle est croissante sur $]-\infty, 0]$ puis décroissante sur $[0, +\infty[$. Les solutions maximales strictement supérieures en un point à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (resp. strictement inférieures à $\frac{1}{\sqrt{3}}$) le restent en tout point ; par ailleurs elles sont strictement décroissantes sur $]-\infty, 0]$ puis strictement croissantes.

Si φ est une solution maximale non constante, on a

$$\frac{2\varphi'(t)}{3\varphi(t)^2 - 1} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{3}\varphi(t) - 1} - \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{3}\varphi(t) + 1} = 2dt$$

soit encore

$$\ln\left|\frac{\sqrt{3}\varphi(t) - 1}{\sqrt{3}\varphi(t) + 1}\right| = \sqrt{3}t^2 + C$$

ou

$$\frac{\sqrt{3}\varphi(t) - 1}{\sqrt{3}\varphi(t) + 1} = C'e^{\sqrt{3}t^2} \ .$$

Finalement

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1 + C'e^{\sqrt{3}t^2}}{1 - C'e^{\sqrt{3}t^2}} \ .$$

Si $C' < 0$, on vérifie que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ et tendent vers $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ si t tend vers $\pm\infty$. Si $0 < C' < 1$, on vérifie que les solutions sont également définies sur $\mathbb{R}$ et tendent vers $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ si t tend vers $\pm\infty$. Pour $C' = 1$, l'expression $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1+e^{\sqrt{3}t^2}}{1-e^{\sqrt{3}t^2}}$ définit deux solutions maximales, l'une sur $]-\infty, 0[$ et l'autre sur $]0, +\infty[$ (l'expression tendant vers $-\infty$ si t tend vers 0). Enfin pour $C' > 1$, les solutions maximales sont définies sur un intervalle ouvert $]-\sqrt{\frac{\ln C'}{\sqrt{3}}}, \sqrt{\frac{\ln C'}{\sqrt{3}}}[$.

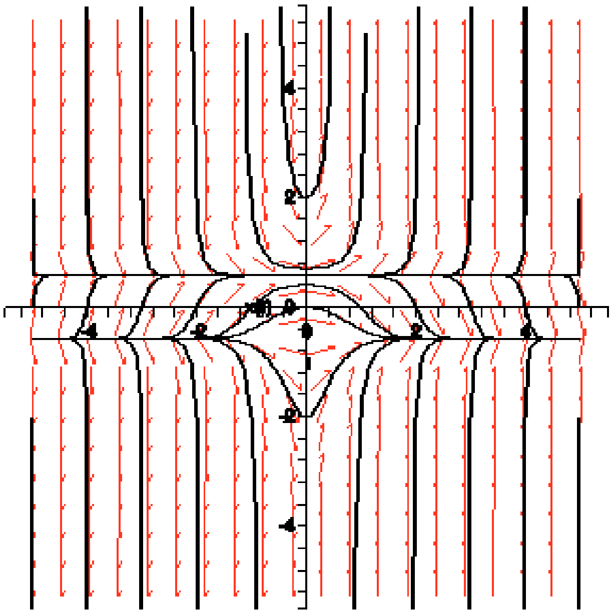

FIG. 1. Quelques trajectoires de l'équation $u' = t(3u^2 - 1)$.

Exercice 2. On considère le système différentiel linéaire

$$\text{(S)} \quad \mathrm{u}' = \mathrm{Au} + 10 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \cos t \\ 10 \sin t \end{pmatrix}$$

2.1. La matrice A étant triangulaire, les valeurs propres de A sont donc -1 et -2 . On voit aussi que le vecteur e_2 est propre pour la valeur propre -2 . Enfin la droite propre pour -1 est la droite d'équation $x - y = 0$; elle est donc engendrée par le vecteur $u_1 = e_1 + e_2$ par exemple. En résumé les solutions du système $u' = Au$ sont les fonctions

$$\lambda e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

2.2. D'après le cours, comme $\pm i$ ne sont pas valeurs propres de A , il existe une (unique) solution particulière de (S) de la forme

$$\cos t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} .$$

Nous allons la déterminer. Elle doit vérifier

$$-\sin t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \cos t \ A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \sin t \ A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} .$$

Soit le système

$$\begin{cases} c \cos t - a \sin t & = & -a \cos t - c \sin t + 10 \cos t \\ d \cos t - b \sin t & = & (a - 2b) \cos t + (c - 2d) \sin t + 10 \sin t \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} c & = & -a + 10 \\ -a & = & -c \\ d & = & a - 2b \\ -b & = & c - 2d + 10 \end{cases} .$$

On en déduit que $a = c = 5$, $b = -1$ et $d = 7$. Donc (S) admet une solution Φ_0 périodique (de période 2π) :

$$\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} 5\cos t + 5\sin t \\ -\cos t + 7\sin t \end{pmatrix} .$$

Elle est unique car toute autre solution s'écrit $\Phi_0(t) + \lambda e^{-t} u_1 + \mu e^{-2t} e_2$; or l'identité

$$\Phi_0(t) + \lambda e^{-t} u_1 + \mu e^{-2t} e_2 = \Phi_0(t + 2\pi) + \lambda e^{-t-2\pi} u_1 + \mu e^{-2t-4\pi} e_2$$

impose à λ et à μ d'être nuls.

2.3. Evaluons $\|\Phi(t) - \Phi_0(t)\|$ si Φ est une solution de (S) . On a

$$\|\Phi(t) - \Phi_0(t)\| = \|\lambda e^{-t} u_1 + \mu e^{-2t} e_2\| \le e^{-t}\|\lambda u_1\| + e^{-2t}\|\mu e_2\|$$

expression qui tend vers 0 si t tend vers $+\infty$.

Exercice 3.

On considère le système suivant :

$$(\Sigma) \begin{cases} x' &= 2x(1-y) \\ y' &= 2y - x^2 + y^2 \end{cases}$$

3.1. Le champ de vecteur

$$G(u) = G(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(1-y) \\ 2y - x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

est polynomial donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que les solutions maximales de (Σ) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition et que, les conditions de Lipschitz étant satisfaites, les trajectoires de ce système forment une partition du plan $\mathbb{R}^2$.

3.2. Considérons la fonction $\Psi(t) = \begin{pmatrix} -\Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix}$ où $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix}$ est une solution maximale de (S) . Alors

$$\Psi'(t) = \begin{pmatrix} -\Phi_1'(t) \\ \Phi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Phi_1(t)(1 - \Phi_2(t)) \\ 2\Phi_2(t) - \Phi_1(t)^2 + \Phi_2(t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Psi_1(t)(1 - \Psi_2(t)) \\ 2\Psi_2(t) - \Psi_1(t)^2 + \Psi_2(t)^2 \end{pmatrix}$$

et donc cette fonction Ψ est une solution maximale de (Σ) . L'ensemble des trajectoires du système est donc bien symétrique par rapport à l'axe des y .

3.3. Le lieu des points du plan où le champ de vecteur est horizontal est le lieu des points où $G_2(x, y)$ s'annule soit

$$2y + y^2 = x^2 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = x^2 + 1 .$$

Il s'agit d'une hyperbole centrée en $(0, -1)$ d'asymptotes $y = -1 \pm x$. Le lieu des points du plan où le champ de vecteur est vertical est le lieu des points où $G_1(x, y)$ s'annule soit $x = 0$ ou $y = 1$. On déduit le régionnement du plan résumé sur le schéma suivant (y figurent les isoclines horizontale et verticales et un tracé du champ de vecteurs) :

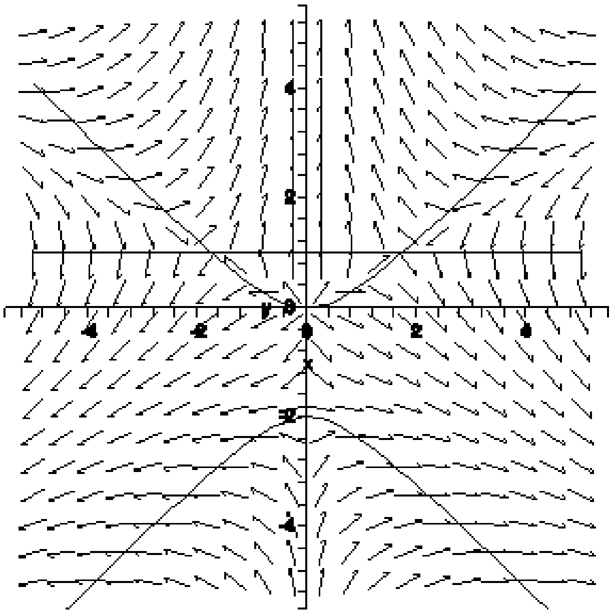

FIG. 2. Le champ de vecteurs $G(u) = (2x(1-y), 2y - x^2 + y^2)$.

3.4. Cherchons des solutions de la forme $(0, \psi(t))$:

$$\begin{cases} 0 & = & 2 \times 0 \times (1 - \psi(t)) \\ \psi'(t) & = & 2\psi(t) - 0^2 + \psi(t)^2 \end{cases}$$

soit $0 = 0$ et $\psi'(t) = \psi(t)(2 + \psi(t))$. Cette équation (autonome) est une équation logistique. Elle admet deux solutions (maximales) constantes (0 et -2). Les solutions maximales comprises (strictement) entre 0 et -2 sont strictement décroissantes et ont 0 et -2 comme asymptotes horizontales respectivement en t tendant vers $-\infty$ et en t tendant vers $+\infty$. Les solutions maximales strictement supérieures à 0 sont strictement croissantes et admettent une asymptote verticale à droite et horizontale en t tendant vers $-\infty$. Les solutions maximales strictement inférieures à -2 sont strictement croissantes et admettent une asymptote verticale à gauche et horizontale en t tendant vers $+\infty$.
On en déduit que l'axe des y porte cinq trajectoires ($]-\infty, -2[$, $\{-2\}$, $]-2, 0[$, $\{0\}$ et $]0, +\infty[$).

3.5. Cherchons des solutions de la forme $(\epsilon\sqrt{3}\lambda(t), \lambda(t))$ (où $\epsilon = \pm 1$) soit :

$$\begin{cases} \epsilon\sqrt{3}\lambda'(t) & = & 2\epsilon\sqrt{3}\lambda(t)(1 - \lambda(t)) \\ \lambda'(t) & = & 2\lambda(t) - \left(\epsilon\sqrt{3}\lambda(t)\right)^2 + \lambda(t)^2 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda'(t) & = & 2\lambda(t)(1 - \lambda(t)) \\ \lambda'(t) & = & 2\lambda(t) - 2\lambda(t)^2 \end{cases} .$$

On est encore ramené à une équation logistique $\lambda'(t) = 2\lambda(t)(1 - \lambda(t))$. Elle admet deux solutions (maximales) constantes (0 et 1). Les solutions maximales comprises (strictement) entre 0 et 1 sont strictement croissantes et ont 0 et 1 comme asymptotes horizontales respectivement en t tendant vers $-\infty$ et en t tendant vers $+\infty$. Les solutions maximales strictement supérieures à 1 sont strictement décroissantes et admettent une asymptote verticale à gauche et une asymptote horizontale en t tendant vers $+\infty$. Les solutions maximales strictement inférieures à 0 sont strictement décroissantes et admettent une asymptote verticale à droite et une asymptote horizontale en t tendant vers $-\infty$.

Chacune des droites $x = \epsilon\sqrt{3}y$ porte donc cinq trajectoires : $(\epsilon\sqrt{3}t, t)$ où t décrit $]-\infty, 0[$, $\{0\}$, $]0,1[$, $\{1\}$ et $]1,+\infty[$.

3.6. Les points d'équilibre de (Σ) sont les points d'intersection des isoclines étudiées plus haut. Il s'agit donc des points $(0,0)$, $(0,-2)$ et $(\pm\sqrt{3},1)$. On notera que les deux derniers points sont symétriques par rapport à l'axe des y . On ne fera donc qu'une seule étude.

La différentielle du champ vaut

$$\begin{pmatrix} 2(1-y) & -2x \\ -2x & 2+2y \end{pmatrix}$$

Etudions chaque point d'équilibre.

– le point $(0,0)$: en ce point la différentielle vaut donc $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ aussi cette matrice est diagonale (avec une valeur propre strictement positive et double) ; les trajectoires du linéarisé sont donc les demi-droites issues de $(0,0)$; il s'agit d'un point répulsif. Le cours permet de conclure que le point d'équilibre est également répulsif pour le système autonome (Σ) . Voici un schéma superposant les trajectoires du linéarisé (en pointillé grisé) et celles de Σ au voisinage de l'origine.

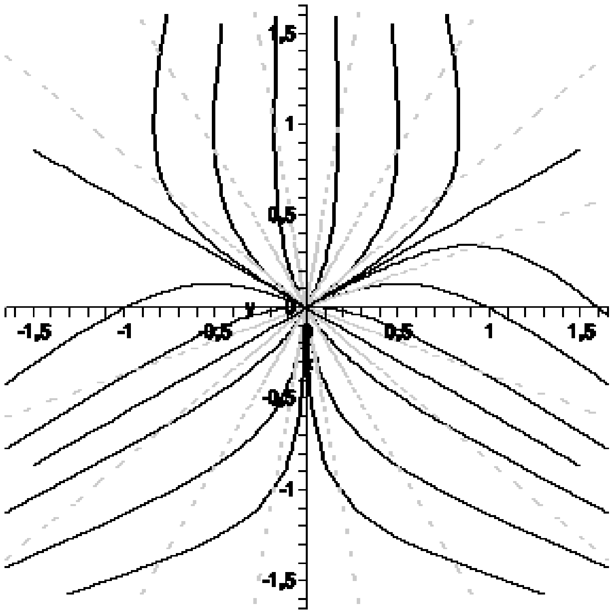

Fig. 3. Trajectoires au voisinage de l'origine.

– le point $(0,-2)$: en ce point la différentielle vaut donc $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ aussi cette matrice est diagonale ; les valeurs propres sont cette fois-ci distinctes et de signe opposé. Il s'agit donc d'un point hyperbolique et les trajectoires du linéarisé sont donc de trois types : deux segments de l'axe des y , issus de $(0,-2)$ (voir la question 3.4 précédente), deux courbes y conduisant et toutes les autres sont de type "hyperboliques" ; il s'agit d'un point col. Le cours permet de conclure que le point d'équilibre est également instable pour le système autonome (Σ) . Voici un schéma superposant les trajectoires du linéarisé (en pointillé grisé) et celles de Σ au voisinage de $(0,-2)$.

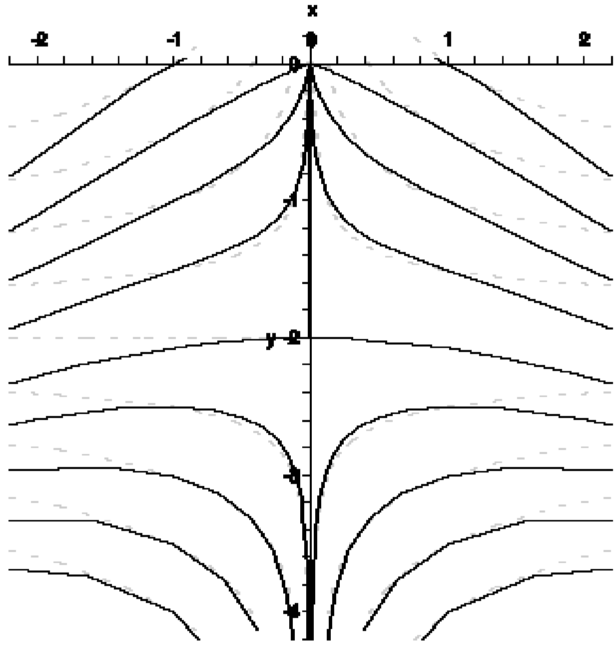

FIG. 4. Trajectoires au voisinage de $(0,-2)$.

– les points $(\pm\sqrt{3},1)$: nous ne ferons qu'une seule étude pour $(\sqrt{3},1)$(les deux points étant symétriques). en ces points la différentielle vaut donc $\begin{pmatrix} 0 & \mp 2\sqrt{3} \\ \mp 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$ et elle admet 6 et -2 comme valeurs propres. Un vecteur propre pour 6 est par exemple $(1,\sqrt{3})$ et un vecteur propre pour -2 par exemple $(\sqrt{3},1)$. Comme ci-dessus il s'agit d'un point hyperbolique instable. Le point, de type "col", est aussi instable pour le système autonome non linéaire. Voici de même un schéma superposant les trajectoires du linéarisé (en pointillé grisé) et celles de Σ au voisinage de $(\sqrt{3},1)$.

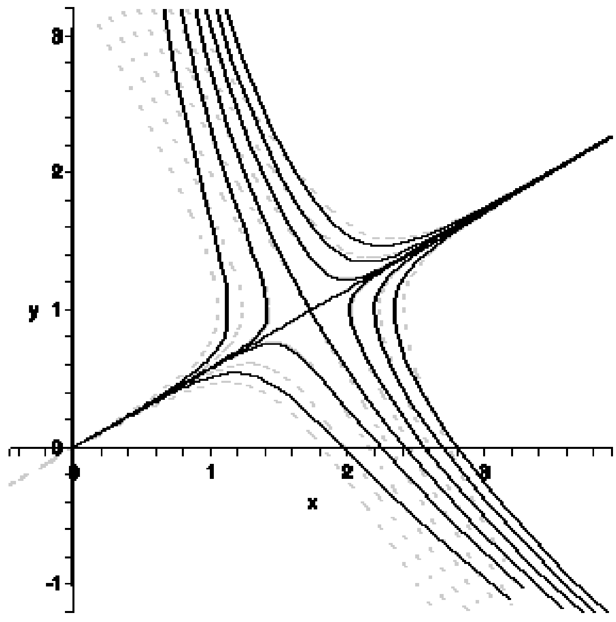

FIG. 5. Trajectoires au voisinage de $(\sqrt{3},1)$.

3.7. Posons $u = \frac{y}{x}$. On a alors

$$u' = \frac{y'}{x} - \frac{yx'}{x^2} = \frac{2y - x^2 + y^2}{x} - \frac{2yx(1-y)}{x^2} = \frac{2y - x^2 + y^2 - 2y + 2y^2}{x}$$

soit encore

$$u' = \frac{du}{dt} = 3x\frac{y}{x}^2 - x = x(3u^2 - 1) \ .$$

Dans la région $x > 0$ et $y < 0$, on a $x' = x(1-y) \geq x$. On en déduit que x est une fonction strictement croissante de t qui n'est pas bornée (puisque $x(t) \geq x_0 \exp t$). On en déduit (de façon analogue à l'exercice 1) que les solutions de l'équation $u' = x(t)(3u^2 - 1)$ qui sont strictement inférieures à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ tendent vers $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ si t tend vers $+\infty$. Cela indique exactement que les trajectoires du quadrant $x > 0$ et $y < 0$ ont comme direction asymptotique la droite de pente $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.8. Voici quelques trajectoires du système (Σ) (on y retrouve les trajectoires portées par des droites et les quatre points d'équilibre) :

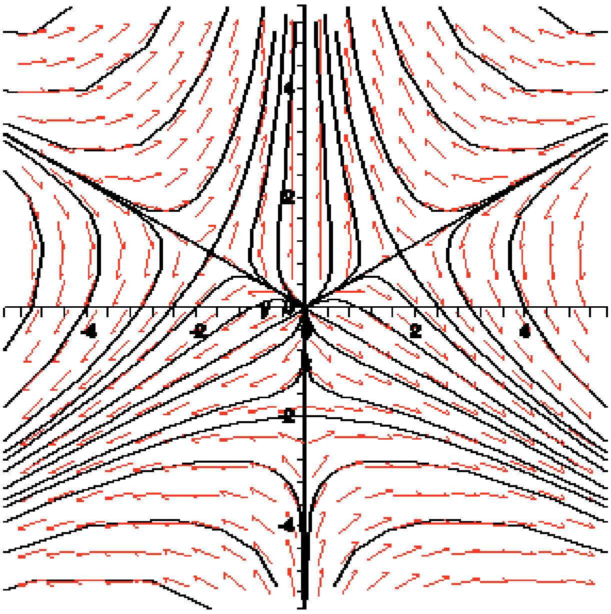

FIG. 6. Trajectoires du système (Σ) .