Université Paris 7 Denis Diderot
Licence L3
2006-2007

UFR de Mathématiques
Equations différentielles
P. Perrin

Examen
Jeudi 3 mai 2007
12h30-15h30

Barême envisagé : 4+6+10

Les exercices 2 et 3 sont indépendants. Les résultats de l'exercice 1 pourront être utilisés à la question 7 de l'exercice 3.

Exercice 1. On considère l'équation différentielle $u' = t(3u^2 - 1)$. En étudier qualitativement les solutions maximales (on précisera notamment si les intervalles de définition sont bornés à droite ou à gauche ainsi que les asymptotes éventuelles).

Exercice 2. On considère le système différentiel linéaire

$$\text{(S)} \quad \mathrm{u}' = \mathrm{Au} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

2.1. Déterminer les solutions du système linéaire homogène associé.

2.2. Déterminer une solution particulière de (S) . Montrer que (S) admet une unique solution Φ_0 périodique.

2.3. Montrer que, si Φ est une solution de (S) , $\|\Phi(t) - \Phi_0(t)\|$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 3.

On considère le système suivant :

$$(\Sigma) \begin{cases} x' &= 2x(1-y) \\ y' &= 2y - x^2 + y^2 \end{cases}$$

3.1. Montrer que les solutions maximales de (Σ) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition. Montrer que les trajectoires de ce système forment une partition du plan $\mathbb{R}^2$.

3.2. Montrer que l'ensemble des trajectoires du système est symétrique par rapport à l'axe des y .

3.3. Déterminer le lieu des points du plan où le champ de vecteur est horizontal (respectivement vertical). En déduire un régionnement du plan suivant la direction du champ que l'on résumera par un schéma.

3.4. Montrer qu'il existe des solutions de la forme $(0, \psi(t))$ et les étudier. En déduire les trajectoires du système (Σ) qui sont portées par l'axe des y .

3.5. Montrer qu'il existe des solutions de la forme $(\epsilon\sqrt{3}\lambda(t), \lambda(t))$ (où $\epsilon = \pm 1$) et les étudier. En déduire les trajectoires du système (Σ) qui sont portées par les droites $x = \epsilon\sqrt{3}y$.

3.6. Déterminer les points d'équilibre de (Σ) . Etudier et déterminer la stabilité de chaque point d'équilibre et dessiner l'allure des trajectoires au voisinage de chacun d'entre eux .

3.7. Posons $u = \frac{y}{x}$. Déterminer une équation différentielle $u' = f(t, u) = x(t)g(u)$ dont u est solution lorsque (x, y) est une solution maximale de (Σ) . En déduire que les trajectoires du quadrant $x > 0$ et $y < 0$ ont une direction asymptotique (on pourra remarquer que $x(t)$ est croissant dans cette région et utiliser l'exercice 1).

3.8. Résumer l'étude de ce système en donnant un schéma donnant quelques trajectoires du système (Σ) .