

(Un) Corrigé du partiel
Lundi 19 mars 2007

Exercice 1. On considère le système différentiel linéaire

$$u' = Au = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

1.1. Si les fonctions $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base des solutions de ce système, cela signifie, d'après le cours, que la matrice A admet 1 et -1 comme valeurs propres. En particulier sa trace doit donc être nulle. Or la trace de A est égale à -2 .

1.2. Si l'on considère maintenant les fonctions $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ces fonctions sont solutions de l'équation différentielle si et seulement si les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre -1 . Or si

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on a par contre

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. Commençons par déterminer les valeurs propres de A . D'après ce qui précède, -1 est une valeur propre de A . Comme la trace de A vaut -2 , c'est que -1 est une valeur propre double. Déterminons alors la dimension et l'espace propre associé (qui contient au moins la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente). Or

$$Au = -u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_1 + u_2 = 0.$$

Aussi A admet une droite propre pour -1 et n'est pas diagonalisable. D'après le cours, on sait que l'on peut trouver une solution de la forme $e^{-t}u + te^{-t}v$ où u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 à déterminer et compléter ainsi la fonction $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en une base des solutions de l'équation différentielle. Déterminons u et v :

$$(e^{-t}u + te^{-t}v)' = A(e^{-t}u + te^{-t}v) \Leftrightarrow -e^{-t}u + e^{-t}v - te^{-t}v = e^{-t}Au + te^{-t}Av.$$

Soit encore

$$-u + v - tv = Au + tAv \Leftrightarrow v = Av \text{ et } Au + u = v.$$

Nous pouvons donc prendre $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Reste à déterminer u :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soit $u_1 + u_2 = 1$. Le vecteur $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Une base des solutions du système est donc formée des fonctions $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.4. On peut remarquer que, si l'on pose $u = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ (comme on l'a vu en cours), l'équation différentielle $x'' + 2x' + 1 = 0$ est équivalente au système de départ. D'après ce qui précède, une base des solutions est donc formée des deux fonctions e^{-t} et te^{-t} (premières composantes respectives des solutions trouvées à la question précédente).

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$x' = \frac{x}{a + x^2}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

2.1. La fonction $\frac{x}{a+x^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Aussi l'équation différentielle satisfait les conditions de Lipschitz : par tout point du plan passe une unique solution maximale (qui est alors de classe \mathcal{C}^∞ sur son intervalle de définition). Or il est immédiat de constater que la fonction nulle est solution de l'équation. On en déduit immédiatement que tout autre solution maximale ne peut s'annuler et donc garde un signe constant. Or les solutions sont strictement croissantes dans le demi-plan supérieur et strictement décroissantes dans le demi-plan inférieur.

2.2. Pour résoudre l'équation différentielle, on pourra remarquer que la fonction est impaire et que donc l'ensemble des graphes des solutions est symétrique par rapport à l'axe des t . Il suffira donc de chercher les solutions strictement positives. Or l'équation devient

$$\left(\frac{a}{x} + x\right)dx = dt \Leftrightarrow a \ln x + \frac{x^2}{2} - a \ln x_0 - \frac{x_0^2}{2} = t - t_0.$$

On constate donc que la fonction $t = C + a \ln x + \frac{x^2}{2}$ est monotone strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (puisque $\frac{dt}{dx} = \frac{a}{x} + x$) et prend toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$. On peut noter qu'elle admet un point d'inflexion en $x = \sqrt{a}$. Elle admet donc une bijection réciproque strictement croissante $x = \varphi(t)$ définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Voici un schéma résumant l'étude.

2.3. Remarquons que l'on a l'inégalité

$$\frac{x}{3 + x^2} \leq \frac{x}{2 + \sin(tx) + x^2} \leq \frac{x}{1 + x^2}$$

(si $x > 0$). Remarquons également que cette nouvelle équation satisfait les conditions de Lipschitz et admet la fonction nulle comme solution maximale. Si l'on applique le théorème de comparaison, on obtient donc les inégalités

$$\forall t \geq t_0, \varphi_3(t) \leq \psi(t) \leq \varphi_1(t)$$

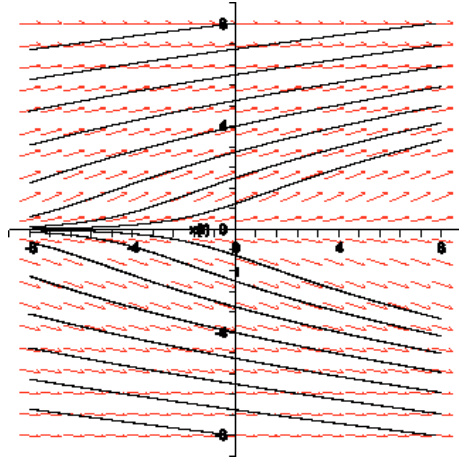


FIG. 1. Quelques solutions maximales de $\frac{x}{a+x^2}$ pour $a = 2$.

où ψ (resp. φ_1, φ_3) désigne la solution maximale de l'équation $x' = \frac{x}{2+\sin(tx)+x^2}$ (resp. $x' = \frac{x}{1+x^2}$, $x' = \frac{x}{3+x^2}$) valant $x_0 > 0$ en $t = t_0$. On a de même

$$\forall t \leq t_0, \varphi_1(t) \leq \psi(t) \leq \varphi_3(t).$$

Voici un schéma donnant les solutions maximales de ces trois équations correspondant à la donnée initiale $(t_0, x_0) = (0, 2)$.

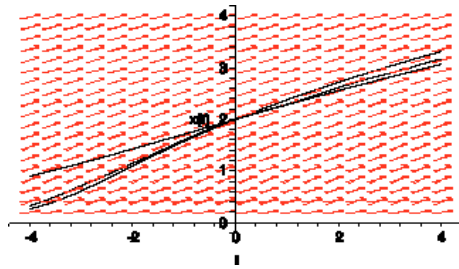


FIG. 2

On constate donc que les solutions maximales de notre nouvelle équation sont encadrées par des fonctions définies sur \mathbb{R} . Elles sont donc elles-même définies sur \mathbb{R} (une solution maximale s'échappant de tout compact). Par ailleurs, on a

$$\varphi_1(t) \equiv_{t \rightarrow +\infty} \varphi_3(t) \equiv_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t}$$

et donc également

$$\psi(t) \equiv_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t}.$$

Voici un schéma donnant quelques solutions maximales de cette équation.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle

$$x' = \frac{x^2}{(1+t^2)} - 2.$$

3.1. La fonction $f(t, x) = \frac{x^2}{(1+t^2)} - 2$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 . On en déduit que les

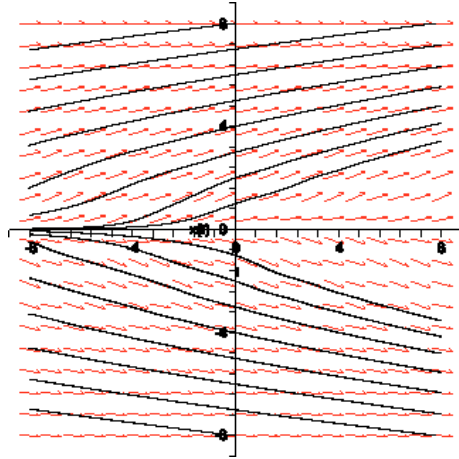


FIG. 3. Quelques solutions maximales de $x' = \frac{x}{2 + \sin(tx) + x^2}$.

solutions maximales de cette équation sont indéfiniment dérivables sur leur intervalle de définition et que, par un point du plan, passe une et une seule solution maximale.

3.2. Soit (I, φ) une solution maximale. Introduisons $(-I, \psi)$, où

$$\forall t \in -I, \psi(t) = -\varphi(-t).$$

Alors

$$\psi'(t) = \varphi'(-t) = f(-t, \varphi(-t)) = f(t, -\varphi(-t)) = f(t, \psi(t)).$$

Donc $(-I, \psi)$ est encore une solution de l'équation différentielle. L'ensemble des graphes des solutions maximales est donc symétrique par rapport à l'origine.

3.3. L'isocline associée à la pente 0 pour cette équation différentielle est l'ensemble des points du plan vérifiant

$$f(t, x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2(1 + t^2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}\sqrt{1 + t^2}.$$

Il s'agit donc d'une hyperbole dont les asymptotes sont données par les droites $x = \pm\sqrt{2}t$.

La région située entre les deux branches de l'hyperbole est la région où les solutions sont décroissantes.

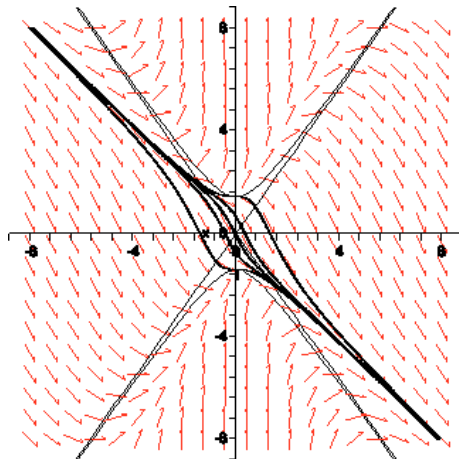


FIG. 4. Quelques solutions maximales de $x' = \frac{x^2}{(1+t^2)} - 2$ et l'isocline 0.

3.4. De même les isoclines associées aux pentes 2 et -1 sont les hyperboles

$$f(t, x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4(1 + t^2) \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{1 + t^2}$$

et

$$f(t, x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 + t^2} .$$

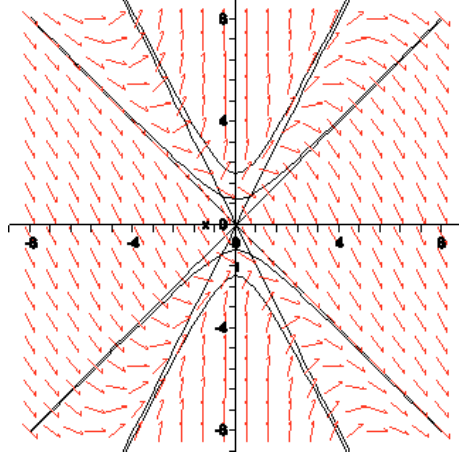


FIG. 5. Le champ de $x' = \frac{x^2}{(1+t^2)} - 2$ et les isoclines -1 et 2 .

3.5. La région $\{(t, x); -\sqrt{2}\sqrt{1+t^2} \leq x \leq \sqrt{2}\sqrt{1+t^2}\}$ est clairement un tunnel puisque la branche supérieure de l'isocline associée à la pente 0 est une barrière supérieure (la dérivée de $\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}$ est positive) et la branche inférieure de l'isocline associée à la pente 0 est une barrière inférieure . Aussi une solution maximale vérifiant $|\varphi(0)| \leq \sqrt{2}$ reste comprise entre deux fonctions définies sur \mathbb{R} . Elle est donc également définie sur \mathbb{R} (une solution maximale s'échappe de tout compact). La solution maximale φ_0 valant 0 en $t = 0$ est donc définie sur \mathbb{R} . Mais la fonction $\psi(t) = -\varphi_0(-t)$ est également solution et admet la même valeur en $t = 0$. Donc ψ et φ_0 coïncident et φ_0 est impaire.

3.6. Montrons que la région $\{(t, x) ; t \geq 0, 2t < x < 2\sqrt{1+t^2}\}$ est un anti-tunnel. Pour cela nous devons démontrer que que la courbe $\gamma(t) = 2\sqrt{1+t^2}$ est une barrière inférieure et la courbe $\delta(t) = 2t$ une barrière supérieure. Or $\gamma'(t) = 2\frac{1}{2}\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $f(t, \gamma(t)) = \frac{4(1+t^2)}{1+t^2} - 2 = 2$ (puisqu'il s'agit d'une branche de l'isocline associée à la pente 2). Or

$$\gamma'(t) = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} < 2 = f(t, \gamma(t)) .$$

Par ailleurs $\delta'(t) = 2$ et $f(t, \delta(t)) = \frac{4t^2}{1+t^2} - 2 = \frac{2t^2-2}{1+t^2}$. Or $\delta'(t) = 2 > \frac{2t^2-2}{1+t^2}$ puisque $2 + 2t^2 > 2t^2 - 2$. D'après le cours, il existe (au moins) une solution maximale ψ_0 telle que

$$\forall t \geq 0; 2t < \psi_0(t) < 2\sqrt{1+t^2} .$$

On remarque alors que $\gamma(t) - \delta(t) = 2\sqrt{1+t^2} - 2t$ tend vers 0 si t tend vers $+\infty$. Par ailleurs la dérivée partielle en x de $f(t, x)$, soit $\frac{2x}{1+t^2}$ est positive dans l'anti-tunnel. Une telle solution ψ_0 est donc unique.

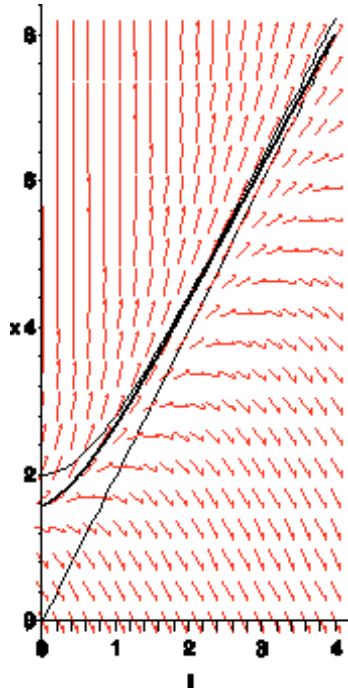


FIG. 6. L'anti-tunnel .

3.7. Voici un schéma présentant quelques solutions maximales de l'équation.

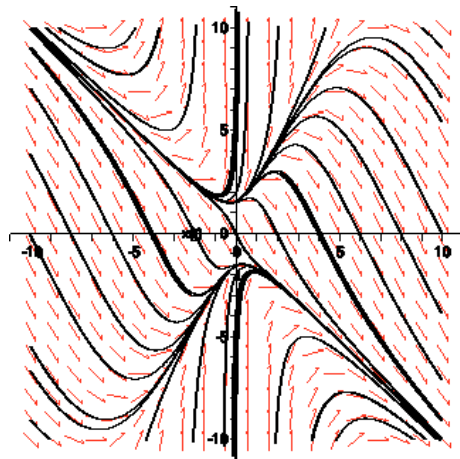


FIG. 7. Quelques solutions maximales de $x' = \frac{x^2}{(1+t^2)} - 2$.

Il serait naturel de chercher à établir que

- les solutions maximales situées au dessus de la séparatrice ψ_0 ont un domaine de définition de la forme $] - \infty, a[$ où a est réel ;
- la séparatrice ψ_0 est définie sur \mathbb{R} , est équivalente à $2t$ si t tend vers $+\infty$ et à $-t$ si t tend vers $-\infty$;
- les solutions comprises strictement entre $-\psi_0$ et ψ_0 sont définies sur \mathbb{R} , équivalentes à $-t$ si t tend vers $-\infty$ et $+\infty$;
- la séparatrice $-\psi_0$ est définie sur \mathbb{R} , est équivalente à $2t$ si t tend vers $-\infty$ et à $-t$ si t tend vers $+\infty$;
- les solutions maximales situées au dessous de la séparatrice $-\psi_0$ ont un domaine de définition de la forme $]b, +\infty[$ où b est réel.