Université Paris Diderot — L3

Équations Différentielles Ordinaires — 2008-2009

Correction des exercices sur les exponentielles de matrices

Cette correction reprend tout ce qui a été fait en TD le mardi 10 Mars 2008. Les questions non corrigées le sont car un exemple similaire est déjà corrigé. Si vous avez des difficultés à comprendre cette correction,+ avez trouvé une erreur, ou souhaitez connaître le résultat des questions non corrigées, n'hésitez pas à m'en avertir en Td ou par e-mail.

Exercice 1. *Quelques exemples*
1) Un calcul simple montre que

$$A_0^n = \begin{pmatrix} \mu^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$e^{A_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A_0^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \mu^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu} & 0 \\ 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

Pour A_3, on trouve que

$$A_3^2 = -t^2 Id, \quad A_3^3 = -t^3 A, \quad A_3^4 = t^4 Id, \quad A_3^5 = t^5 A \ldots$$

et ainsi de suite, c'est-à-dire que

$$A_3^{4n} = t^{4n} Id,\ A_3^{4n+1} = t^{4n+1} A,\ A_3^{4n+2} = -t^{4n+2} Id,\ A_3^{4n+3} = -t^{4n+3} A, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Quand on écrit la somme de la série de matrice qui définit e^{A_3}, on obtient:

$$\begin{aligned} e^{A_3} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \ldots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) B_0 est une matrice diagonale par blocs. Il faut calculer l'exponentielle pour chaque bloc. Cela donne

$$B_0 = \left(\begin{array}{c|cc} \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{array}\right) \quad \text{donc} \quad e^{B_0} = \left(\begin{array}{c|cc} e^{\mu} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{array}\right)$$

Exercice 2. *Propriétés utiles de l'exponentielle.*
1) On a $B^2 = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA^2P^{-1}$ et par récurrence, on montre que $B^n = PA^nP^{-1}$. Ce qui implique

$$e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} B^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} PA^nP^{-1} = P \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) P^{-1} = Pe^AP^{-1}$$

2) On cherche les vecteurs propres des matrices A_3 etA_4. Écrits en colonne dans une matrice, ils forment la matrice de passage attendue. On obtient:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne aussi

$$P_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad P_4^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P_4\,.$$

Et on vérifie après calculs que l'on a bien $e^{A_3} = Pe^{C_3}P^{-1}$ et $e^{A_4} = Pe^{C_4}P^{-1}$.
3) On sait que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ et donc que ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2$ et par récurrence ${}^t(A^n) = ({}^tA)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$e^{{}^tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}({}^tA)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,{}^t(A^n) = {}^t\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n\right) = {}^t(e^A)$$

4) Le cas A symétrique est laissé en exercice. Si A est anti-symétrique, on a ${}^tA = -A$. Donc,

$${}^t(e^A) = e^{{}^tA} = e^{-A} = (e^A)^{-1}\,.$$

si on pose $P = e^A$, on a écrit que ${}^tP = P^{-1}$, ce qui est la définition d'une matrice orthogonale.

Exercice 3. *Déterminant de* e^A
1) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les coefficients diagonaux de la matrice diagonale A. Alors, e^A est elle aussi diagonale de coefficients diagonaux $(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$. Et donc

$$\det(e^A) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\mathrm{Tr}(A)}$$

car la trace d'une matrice complexe est la somme de ses valeurs propres.
2) Si A est seulement diagonalisable, on a $A = P\Delta P^{-1}$, où Δ est diagonale. La réponse s'obtient ensuite en appliquant le résultat précédent (question 1) et en utilisant quelques formules classiques.
3) Le produit de deux matrices triangulaires supérieures T et T' est une matrice triangulaire supérieure $T'' = TT'$, et on a la relation $T''_{i,i} = T_{i,i}T'_{i,i}$. Grâce à cela, on peut démontrer par récurrence que A^n est triangulaire supérieure et que $(A^n)_{i,i} = (A_{i,i})^n$. La suite est laissée en exercice.
4) La question précedente permet de dire que $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ si A est une matrice complexe trigonale. Comme toute matrice complexe est trigonalisable, on peut en déduire (exo) le résultat pour toute matrice complexe.